

MA1101-1 Introducción al Álgebra**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Marcelo Navarro**Auxiliar 9: Sumatorias II**

28 de Junio de 2018

- Se define una doble sumatoria como una suma $\sum_{k=n}^m b_k$. En donde $b_k = \sum_{i=p}^q a_{i,k}$. Es posible

$$\text{escribir esto como } \sum_{k=n}^m b_k = \sum_{k=n}^m \sum_{i=p}^q a_{i,k}$$

Las sumatorias múltiples se definen del mismo modo.

- En una sumatoria múltiples, si los límites superiores e inferiores no dependen de los índices entonces se pueden intercambiar las sumatorias, es decir

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{k,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{k,j}$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (a_k \cdot b_j) = \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \sum_{j=1}^m b_j)$$

Esto ocurre siempre que a_k no dependa del índice j , pues se considera constante para la sumatoria más interna

- Factorial de número:

$$n! = n \cdot (n-1)!, \text{ donde } 0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

P1. [¿Como escribo una sumatoria? :c]

Considere, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

P2. [Más sumatorias]

- a) Sea $m \in \mathbb{N}, m \geq 5$. Calcule:

$$\sum_{i=5}^m \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)}$$

- b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \{(n-p) \in \mathbb{N} : 0 \leq p < n, p \in \mathbb{N}\}$. Calcule:

$$\sum_{j \in \Omega} \sum_{k=1}^j (k + \frac{2^j}{j})$$

P3. [Intercambio de sumatorias]

- a) Demostrar que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) a_i$$

c) Demuestre que si $a_{n,m}$ es una secuencia, entonces:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j: j=0 \pmod i \\ 0 < j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i: i \text{ divide a } j} a_{i,j}$$

P4. [Suma a través de conjunto de índices disjuntos]

a) Se pide calcular en función de n , el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

procediendo como se indica:

- 1) Escriba la suma de los términos pares usando $k = 2i$, con $i \in \{1, \dots, n\}$.
- 2) Escriba la suma de los términos impares usando $k = 2i - 1$, con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Use esto para calcular la suma pedida al inicio.

b) [**Propuesto**] Sea $n \in \mathbb{N}$ positivo. Calcule

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3 + (-1)^k)^k}$$