

MA1101-2 y 7 Introducción al Álgebra**Profesor:** Leonardo Sánchez, Daniel Quiroz B.**Auxiliar:** Marcelo Navarro, Gonzalo Alfaro,

Camila Fernández, Fernanda Macías.

**Trabajo dirigido: Control Recuperativo**

20 de Mayo de 2019

1. Inducción y Sumatoria**P1. C3-2009** Se define por recurrencia la colección de reales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = \frac{12}{1 + a_n}, \forall n \geq 1$$

Demuestre por inducción que:

i) $a_{2n-1} < a_{2n+1}, \forall n \geq 1$

ii) $a_{2n} > 3, \forall n \geq 1$

P2. C3-2013 Demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) 5^{2n} + (-1)^{n+1}$$

es divisible por 13.

P3. C3-2014 Sea la secuencia definida por

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$$

Pruebe, usando inducción, que $\forall n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n a_i = (n+1)a_n - n$$

.

P4. EX-2018/2 Considere la sucesión definida por recurrencia de la siguiente manera: $a_1 = 1, a_2 = 8$ y $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \leq 3$. Demuestre que $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.**P5. CR-2011** Demuestre usando inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$$

P6. EX-2014 Determine a_n si se cumple que

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{3}(n^2 + 5n)$$

P7. Ex-2009 Calcule $\sum_{k=1}^n (k+1) \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$

2. Conjuntos

P8. C1-2010

- (a) Sean A, B conjuntos no vacíos relativos a un universo $\mathcal{U}$. Demuestre que $A \subseteq B \iff B^C \subseteq A^C$.
 (b) Para A, B, C conjuntos no vacíos relativos a $\mathcal{U}$ demuestre que $[(A \cap B) \subseteq C] \implies [(A \cap C^C) \subseteq B^C]$

P9. C1-2018-2

- (a) Demuestre que nunca se cumple $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B))$
 (b) Demuestre que no siempre se cumple que $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

P10. C1-2008

- (a) Sea A un subconjunto fijo del conjunto universo $\mathcal{U}$. Probar que $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \implies X = Y$$

- (b) Sea $A \subseteq \mathcal{U}, A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ por

$$X \in \mathcal{F}_A \text{ ssi } X \subseteq \mathcal{U} \wedge X \cap A \neq \emptyset.$$

Demuestre que dado $B \subseteq \mathcal{U}$

1. $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_A \wedge A \in \mathcal{F}_A$
2. Si $A \setminus B \neq \emptyset \implies B^C \in \mathcal{F}_A$
3. Si $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq \mathcal{U} \implies (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$

3. Funciones

P11. C2-2017 Sea E un conjunto de referencia no vacío y $B_0 \subseteq E$ fijo. Considere la función

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\longrightarrow \mathcal{F}(X) = (X \setminus B_0, X \cap B_0) \end{aligned}$$

- (a) Demuestre que $X = (X \setminus B_0) \cup (X \cap B_0)$
 (b) Demuestre que la función $\mathcal{F}$ es inyectiva.
 Indicación: Puede ser útil utilizar la parte (a).
 (c) Demuestre que la función $\mathcal{F}$ NO es epiyectiva.

P12. [P2 Control 1, Año 2016-β]

- a) Sea $R: X \rightarrow X$ tal que $R(X) = X$ y $R \circ R = R$. Demuestre que $R = Id_X$.
 b) Sea $S: X \rightarrow X$ sobreyectiva tal que $S \circ S \circ S = S$. Demuestre que S es invertible y calcule su inversa.
Hint: Puede usar el resultado de la parte anterior para una función apropiada.

P13. C2-2012 Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ y sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \rightarrow B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

- (i) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.
- (ii) Demuestre que si f, g son epiyectivas, entonces h es epiyectiva.
- (iii) Demuestre que si f, g son biyectivas, entonces h es biyectiva y encuentre su inversa. Justifique su respuesta.

P14. C3-2019 Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Un conjunto $C \subseteq A$ se dice estable para f si

$$f^{-1}(f(C)) = C.$$

- (i) Demuestre que si C y D son estables para f , entonces $C \cup D$ también lo es.
- (ii) Demuestre que para todo $C \subseteq A$, el conjunto $D = f^{-1}(f(C))$ es estable para f .

4. Relaciones

P15. C3-2009 Sea E un conjunto y $A \neq \emptyset$ un conjunto fijo de E . Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por

$$X \mathcal{R} Y \iff A \setminus X = A \setminus Y.$$

- (i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- (ii) Demuestre que el conjunto cociente

$$\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]_{\mathcal{R}} | X \in \mathcal{P}(A)\}.$$

P16. C2-2018/2 En $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ se define la relación $\trianglelefteq$ por

$$(u, v) \trianglelefteq (u', v') \text{ ssi } u \leq u' \text{ y } u + v \leq u' + v'$$

Demuestre que $\trianglelefteq$ es una relación de orden. Indique si es un orden total o parcial.

P17. CR-2016 Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la relación R dada por

$$(x, y) R (z, t) \iff xt = zy$$

- (a) Demuestre que R es una relación de equivalencia y describa explícitamente las clases $[(0, 1)]_R$ y $[(3, 3)]_R$.
- (b) Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Demuestre que

$$(x, y) R (z, t) \iff f(x, y) = f(z, t)$$

- (c) Demuestre que la función $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / R \rightarrow \mathbb{Q}$ (desde el conjunto cociente en $\mathbb{Q}$) dada por $F([x, y]_R) = f(x, y)$ es biyectiva.