MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 9: Binomio y Cardinalidad

14 de Mayo de 2019

P1. Sea $A = [0..n]$ y considere la secuencia $(x_0, x_1, \dots)$ de elementos en A. Pruebe que existen $\ell, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_\ell = x_j$.

P2. Demuestre que $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \dots, m\}\}| = 2^{m-1}$

P3.

a) Demuestre que

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

b) Demuestre que

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = 3^n$$

c) Pruebe sin usar inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

P4. Dé un ejemplo de conjuntos A y B, conjuntos numerables, tales que $A \cap B$ no sea numerable.

P5. Demuestre que si $B \subseteq A$, A es infinito y B finito, entonces $A \setminus B$ es infinito.

P6. Sean A, B, C, D conjuntos. Demuestre o de un contraejemplo de:

a) Si $|A| = |B|$ y $|A \times C| = |B \times D|$, entonces $|C| = |D|$.

b) Si $|A| = |B|$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ y $|A \cup C| = |B \cup D|$ entonces $|C| = |D|$.

c) Si $A \subset B \Longrightarrow |A| < |B|$

P7. Demuestre que el conjunto de todos los triangulos cuyos vertices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.
Propuesto: ¿Que ocurre si, en el mismo problema, en vez de pensar en triángulos pensamos en polígonos?

P8. Considere el conjunto $A \neq \emptyset$, se define el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3\} \to A \mid f \text{ es función}\}$.

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$
Hint: para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$

b) Demuestre que si A es numerable, entonces $\mathcal{F}$ tambien lo es.

Resumen

- **[Cantidad de inyecciones]**: Sean A, B conjuntos tales que $|A| = k$ y $|B| = n$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \longrightarrow B | f \text{ es inyectiva } \}| \\ &= \# \text{ de k- tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.}\end{aligned}$$

- **[Coeficiente Binominal]**: Para dos enteros n y k, $n \geq 0$, se define

$$\binom{n}{k}$$

Este numero representa el numero de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n. Se verifica que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **[Propiedades relevantes]**:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

- **[Binomio de Newton]**: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **[Cardinal de la imagen de un conjunto]**: Si $f : A \to B$ función, entonces $|f(A)| \leq |A|$
- **[Conjunto numerable]**: Un conjunto A se dira numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$. En particular tenemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
- **[Propiedades Cardinal infinito]**: Sea A conjunto infinito, entonces:

i) Si A infinito y B finito, entonces $|A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$

ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto B_k tal que $B_k \subseteq A$ y $|B_k| = k$.

iii) $|A| \geq |\mathbb{N}|$ es decir el cardinal de los naturales es **el menor cardinal infinito**.

Obs.: Si $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces A es numerable.

- **[Álgebra de numerables]**:

i) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos $(A_i)_{i \in I}$ (con $I \subseteq \mathbb{N}$) es a lo más numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

Cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$

ii) La unión finita de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^{n}$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Es numerable.

iii) La unión numerable de conjuntos numerables $(A_i)_i^n$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Es numerable.

iv) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^{n}$ es numerable, es decir:

$$A := \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Es numerable.