

MA1101-2 Introducción al Álgebra**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Marcelo Navarro**Auxiliar 8: Sumatorias y Cardinalidad Finita**

07 de Mayo de 2019

P1. Calcular $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$

P2. Considere, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y como ejercicio propuesto calcule su valor.

P3. a) Demostrar que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^n (n-i+1)a_i$$

P4. Pruebe que $|A \times B| = |B \times A|$ con A y B finitos. ¿Es necesario que sean A y B finitos en su demostración?

P5. Sea $A = [0..n]$ y considere la secuencia $(x_0, x_1, \dots)$ de elementos en A . Pruebe que existen $\ell, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_\ell = x_j$.

P6. Demuestre que $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \dots, m\}\}| = 2^{m-1}$

Resumen

- **[Índices disjuntos]:** Sea $(a_k)_{k \in [1..n]}$ una secuencia de números reales y sean $I, J \subseteq [1..n]$ disjuntos. Entonces:

$$\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k$$

Obs: $[1..n] = \{1, \dots, n\}$

- **[Intercambio de sumas dobles]:** Para una sumatoria doble $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}$ cuyos **límites inferiores y superiores no dependen de los índices**, se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{kj}$$

- **[Conjunto finito]:** Un conjunto A se dice finito si posee finitos elementos, es decir si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que existe una función $f : A \rightarrow [1..n]$.
- **[Cardinal finito]:** Sea A un conjunto finito. Definimos el cardinal de A - denotado por $|A|$ - como el único $n \in \mathbb{N}$ para el que existe una enumeración $a_1, \dots, a_n$ de A .
- **[Propiedades varias]:**
 1. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$
 2. $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B$ biyectiva.
 3. Si B es finito y $A \subseteq B$, entonces A es finito y $|A| \leq |B|$

4. Si A, B finitos disjuntos entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$

5. Si $B \subseteq A$ con A finito, entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$. En particular si $|A| = |B|$ entonces $A = B$

6. Si A, B finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- **[Equivalencia para funciones]:** Si A, B finitos con $|A| = |B|$ y sea $f : A \rightarrow B$ función. Son equivalentes:

- f es inyectiva.
- f es epiyectiva.
- f es biyectiva.

- **[Propiedad importante]:** Sean A, B conjuntos con B finito. Se tiene:

1. A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe $f : A \rightarrow B$ inyectiva.
2. A es finito y $|A| = |B|$ si y solo si existe $f : A \rightarrow B$ biyectiva.

- **[Cardinal producto]:** Sean A, B conjuntos finitos, se tiene que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- **[Conjunto de funciones]:** Sean A, B conjuntos, se define:

$$B^A := \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es función}\}$$

Además, se cumple que $|B|^{|A|}$