

Estudiamos $[p]_{\sim}$ con $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \rightarrow [p]_{\sim} &= \{x \in \mathbb{R} : x \sim p, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (p-x) \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (p-x) = k, k, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = p-k, k, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = p-k, p-k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

P5

$f: X \rightarrow Y$ una función $R \subseteq Y \times Y$

a) Relación preimagen $f^{-1}(R) \subseteq X \times X$

$$x_1 f^{-1}(R) x_2 \Leftrightarrow f(x_1) R f(x_2)$$

b) pda $f^{-1}(R)$ es de equivalencia; notemos antes que si $x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

Refleja: sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x f^{-1}(R) x &\Leftrightarrow f(x) R f(x) \\ &\Leftrightarrow \checkmark, \text{ pues } R \text{ es refleja} \\ &\quad \text{y } f(x) \in Y \end{aligned}$$

Simétrica: Sea $x_1, x_2 \in X$ t.q. $x_1 f^{-1}(R) x_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 f^{-1}(R) x_2 &\stackrel{\text{def}}{\iff} f(x_1) R f(x_2) \\ &\rightarrow f(x_2) R f(x_1) \quad \downarrow R \text{ es Simétrica} \\ &\stackrel{\text{def}}{\iff} x_2 f^{-1}(R) x_1 \end{aligned}$$

Transitiva: Sea $a, b, c \in X$ t.q. $a f^{-1}(R) b$ y $b f^{-1}(R) c$

$$\Rightarrow a f^{-1}(R) b \quad \wedge \quad b f^{-1}(R) c$$

$$\Leftrightarrow f(a) R f(b) \quad \wedge \quad f(b) R f(c)$$

$$\Rightarrow f(a) R f(c) \quad \text{pues } R \text{ es transitiva}$$

$$\Leftrightarrow a f^{-1}(R) c$$

$\therefore f^{-1}(R)$ es de equivalencia pues es reflexiva, simétrica y transitiva

$$2) \text{ p.d.g. } [x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$$

$$\text{sea } w \underset{\text{arbitrario}}{\in} f^{-1}([f(x)]_R) \stackrel{\text{cte preimagen}}{\iff} f(w) \in [f(x)]_R$$

$$\iff f(w) R f(x)$$

$$\iff w f^{-1}(R) x$$

$$\iff w \in [x]_{f^{-1}(R)}$$

b) $f: X \rightarrow Y$ epiyectiva $R' \subseteq X \times X$ de equivalencia

Relación Imagen $f(R') \subseteq Y \times Y$

[Notemos que como f es epiyectiva]
 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$

$$y_1, f(R') y_2 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \\ \wedge x_1 R' x_2$$

pdq: $f(R')$ es de equivalencia si f es inyectiva

Refleja: sea $\bar{y} \in Y \xrightarrow{\text{epiyecc}} \exists \bar{x} \in X f(\bar{x}) = \bar{y}$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 = \bar{x}, \text{ t.q. } f(x_1) = f(\bar{x}) = \bar{y} \\ \wedge f(x_2) = f(\bar{x}) = \bar{y}$$

y como R' , si $a \in X \Rightarrow a R' a$
es refleja

$$\text{Luego si } \bar{y} \in Y \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 = \bar{x} \text{ t.q. } f(x_1) = f(\bar{x}) = \bar{y} \\ \wedge f(x_2) = f(\bar{x}) = \bar{y} \\ \wedge x_1 R' x_2$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} f(R') \bar{y} \quad \therefore \text{ es refleja}$$

Simétrica: Sea $y_1, y_2 \in Y$ t.q. $y_1 f(R') y_2$
queremos probar que $y_2 f(R') y_1$

$\Rightarrow$ Si $y_1 f(R') y_2$

$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2$

$\Leftrightarrow \exists x_2, x_1 \in X, f(x_2) = y_2 \wedge f(x_1) = y_1 \wedge x_2 R' x_1$

pues " $\wedge$ " conmuta y " R' " es simétrica

$\Leftrightarrow y_2 f(R') y_1$

$\therefore f(R')$ es simétrica

Transitiva: Sea $y_1, y_2, y_3 \in Y$ t.q.

$y_1 f(R') y_2 \wedge y_2 f(R') y_3$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1 \wedge (f(x_2) = y_2) \wedge x_1 R' x_2$

$\wedge \exists x'_2, x_3 \in X, (f(x'_2) = y_2) \wedge f(x_3) = y_3 \wedge x'_2 R' x_3$

A priori x_2 y x'_2 son distintos, pero...

Como $f(x_2) = y_2 \wedge f(x'_2) = y_2$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x'_2) \xRightarrow{\text{Inyectiva}} x_2 = x'_2$

Luego $x_2 = x_2'$ por lo que las expresiones quedan

$$\exists x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2 \\ \wedge \exists x_2, x_3 \in X \quad f(x_2) = y_2 \wedge f(x_3) = y_3 \wedge x_2 R' x_3$$

En particular se puede concluir que

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in X, \quad f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge f(x_3) = y_3 \\ \wedge \quad x_1 R' x_2 \quad \wedge \quad x_2 R' x_3$$

Como R' es transitiva $\Rightarrow x_1 R' x_3$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_3 \in X \quad f(x_1) = y_1 \wedge f(x_3) = y_3 \wedge x_1 R' x_3$$

$$\Leftrightarrow y_1 f(R') y_3$$

$\therefore f(R')$ es transitiva y por lo tanto es de equivalencia

Ahora probemos que $R' = f^{-1}(f(R'))$

Notar que hay que probar una igualdad de conjuntos

$R' \subseteq X \times X$ por lo que en R' viven pares ordenados

pdg $R' = f^{-1}(f(R'))$
doble inclusión

[$\subseteq$] Sea $(a, b) \in f^{-1}(f(R'))$ arbitrario

$$\Rightarrow a \in f^{-1}(f(R')) \wedge b$$

def $\Leftrightarrow f(a) \in f(R') \wedge f(b)$

} en (a) se definió la relación preimagen

def $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(a) = f(x_1) \wedge f(b) = f(x_2) \wedge x_1 R' x_2$

$\Rightarrow$ como f es inyectiva

$$f(x_1) = f(a) \Rightarrow x_1 = a$$

$$f(x_2) = f(b) \Rightarrow x_2 = b$$

Luego, como $x_1 R' x_2 \Leftrightarrow a R' b$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in R'$$

$$\therefore (a, b) \in f^{-1}(f(R')) \Rightarrow (a, b) \in R'$$

≡ probemos ahora que

$$\text{si } (a,b) \in R' \Rightarrow (a,b) \in f^{-1}(f(R'))$$

Procedamos por contradicción.

$$\text{Sea } \underbrace{(a,b) \in R'}_{\textcircled{1}} \wedge \underbrace{(a,b) \notin f^{-1}(f(R'))}_{\textcircled{2}}$$

$$\text{de } \textcircled{1} \quad a \in X \wedge b \in X \quad \textcircled{2}$$

$$\text{de } \textcircled{2}, \text{ que } (a,b) \notin f^{-1}(f(R'))$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(a) = f(x_1) \wedge f(b) = f(x_2) \wedge \neg x_1 R' x_2$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, f(a) \neq f(x_1) \vee f(b) \neq f(x_2) \vee x_1 \not R' x_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall x_1, x_2 \in X, f(a) \neq f(x_1) \right\} \text{ (i)}$$

$$\vee \left\{ \forall x_1, x_2 \in X, f(b) \neq f(x_2) \right\} \text{ (ii)}$$

$$\vee \left\{ \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \not R' x_2 \right\} \text{ (iii)}$$

Si se cumple (i), se tiene que $f(a) \neq f(x_1) \quad \forall x_1 \in X$

pero esto es falso, pues $a \in X$ pues $(a,b) \in R'$

$$\Rightarrow \text{Si } x_1 = a \Rightarrow f(a) \neq f(a) \quad \Rightarrow \Leftarrow \text{Contradicción}$$

• Si se cumple (ii) es el mismo argumento

$$x_2 = b \Rightarrow f(b) \neq f(b) \Rightarrow \Leftarrow \text{Contradicción}$$

• Si se cumple (iii) se tiene que

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 R' x_2$$

Sin embargo sabemos que $(a, b) \in R'$

$\Rightarrow a R' b$ por lo que se tiene una
Contradicción $\Rightarrow \Leftarrow$

2) Si f no fuera inyectiva la transitividad
no se tendría