

Aux 6

Φ 1) a) Determinar $f(\{(u, \emptyset), (\emptyset, A), (A, \emptyset)\})$ con $A \subseteq U$

Nos piden el cpto imagen, por lo que debemos calcular cada imagen por separado y luego unirlos. ¿Por qué se puede hacer esto?

$$f(\{(u, \emptyset), (\emptyset, A), (A, \emptyset)\}) = f(\{(u, \emptyset)\}) \cup f(\{(\emptyset, A)\}) \cup f(\{(A, \emptyset)\})$$

$\searrow$
 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Luego

$$\left. \begin{aligned} f(u, \emptyset) &= u \setminus \emptyset = u \\ f(A, \emptyset) &= A \setminus \emptyset = A \\ f(\emptyset, A) &= \emptyset \setminus A = \emptyset \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(\{(u, \emptyset)\}) &= \{u\} \\ f(\{(A, \emptyset)\}) &= \{A\} \\ f(\{(\emptyset, A)\}) &= \{\emptyset\} \end{aligned}$$

$$\therefore f(\{(u, \emptyset), (\emptyset, A), (A, \emptyset)\}) = \{u\} \cup \{A\} \cup \{\emptyset\} = \{u, A, \emptyset\}$$

b) PDA: $f^{-1}(\{u, \emptyset\}) = \{(u, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in P(U) \times P(U) : X \subseteq Y\}$

Recordar que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$$\Rightarrow f^{-1}(\{u, \emptyset\}) = f^{-1}(\{u\} \cup \{\emptyset\}) \\ = f^{-1}(\{u\}) \cup f^{-1}(\{\emptyset\})$$

Por lo que debemos calcular $\underbrace{f^{-1}(\{u\})}_{(1)}$ y $\underbrace{f^{-1}(\{\emptyset\})}_{(2)}$

1) Notar que $(X, Y) \in f^{-1}(\{u\})$
 $\Leftrightarrow f(X, Y) \in \{u\}$ $\nearrow$ definición
 $\Leftrightarrow X \setminus Y \in \{u\}$ $\nearrow$ def de f
 $\Rightarrow X \setminus Y = u$

De aquí, podemos concluir que $Y = \emptyset$, ya que si esto no fuera así $\exists \alpha \in Y \subseteq u$ + $\alpha \in u$ pero $\alpha \notin X \setminus Y$ por lo que $X \setminus Y \neq u \Rightarrow \Leftarrow$

Luego $Y = \emptyset$

$$\Rightarrow X \setminus Y = u$$

$$\Leftrightarrow X \setminus \emptyset = u$$

$$\Rightarrow X = u, Y = \emptyset$$

$$\therefore f^{-1}(\{u\}) = \{(u, \emptyset)\}$$

Ahora (2), notar que si

$$(x, y) \in f^{-1}(\{\emptyset\}) \Leftrightarrow f(x, y) \in \{\emptyset\}$$

$$\Leftrightarrow X \setminus Y \in \{\emptyset\}$$

$$\Rightarrow X \setminus Y = \emptyset$$

único elemento

Luego como $X \setminus Y = \emptyset$, podemos decir que $X \subseteq Y$, ya que si esto no fuera así, $\exists x \in X$, t.q. $x \notin Y$

$\Rightarrow x \in X \setminus Y$ luego hay un elemento por lo que no puede ser $X \setminus Y = \emptyset \Rightarrow \Leftarrow$

$$\Rightarrow \text{Como } X \setminus Y = \emptyset \Rightarrow X \subseteq Y$$

$$\therefore (x, y) \in f^{-1}(\{\emptyset\}) \text{ si } X \subseteq Y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{(x, y) : X \subseteq Y\}$$

Luego

$$f^{-1}(\{u, \emptyset\}) = f^{-1}(\{u\}) \cup f^{-1}(\{\emptyset\})$$

$$= \{(u, \emptyset)\} \cup \{(x, y) : X \subseteq Y\}$$

P1) c) ¿ $f(D)$? en $D = \{ \{x, x\} : x \in P(u) \}$

notar que $f(x, x) = x \setminus x = \emptyset \quad \forall x \in P(u)$

$$\Rightarrow f(\{x, x\}) = \{\emptyset\} \quad \forall x \in P(u)$$

$$\Rightarrow \textcircled{\text{P1}} \quad f(D) = \{\emptyset\}$$

P2) a) porq $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

$$\text{Sea } \alpha \in (g \circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow g \circ f(\alpha) \in A \quad \left(\begin{array}{l} \text{def} \\ \text{cto preimagen} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow g(f(\alpha)) \in A \quad \left(\begin{array}{l} \text{def} \\ \text{Composición} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) \in g^{-1}(A)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in f^{-1}(g^{-1}(A))$$

Como fue para $\alpha \in E$ arbitrario se cumple que

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

b) Por doble inclusión, pdg $f(f^{-1}(B)) = B \cap F(E)$

c) sea $y \in f(f^{-1}(B))$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in f^{-1}(B), f(\alpha) = y \rightarrow \text{ojo!}$$

$$\Rightarrow \text{como } \alpha \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \underbrace{f(\alpha)}_{\text{pero } f(\alpha) = y} \in B$$

$$\Rightarrow y \in B, \text{ con esto falta ver que } y \in F(E)$$

Por otro lado, como $\alpha \in f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(B) \subseteq \text{Dom}(f)$

$$\Rightarrow \alpha \in \text{Dom}(f) = E \Leftrightarrow \alpha \in E$$

$$\Rightarrow f(\alpha) \in f(E)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(E)$$

$$\text{Luego } y \in B \wedge y \in f(E)$$

$$\Rightarrow y \in B \cap f(E)$$

$$\supseteq \text{ sea } \beta \in F(E) \cap B$$

$$\Rightarrow \beta \in F(E) \quad \wedge \quad \beta \in B$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in E \text{ t.q. } f(\alpha) = \beta \quad \wedge \quad \beta \in B$$

$$\Rightarrow f(\alpha) \in B$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in f^{-1}(B) \quad \swarrow \text{ def preimage}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\alpha)}_{f(\alpha) = \beta} \in f(f^{-1}(B))$$

$$\Rightarrow \beta \in f(f^{-1}(B))$$