

Auxiliar #7

P1 $f: E \rightarrow F$

a) p.d.g. $\forall A \in F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

En efecto, sea $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c$

$$\Leftrightarrow f(x) \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A)$$

$$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c$$

se ocupa
 $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$
 ↳ Observación del Resumen

$$\therefore f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$$

b) p.d.g. $f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$

Notemos que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
 $= (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c$

$$\Rightarrow f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}((A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c)$$

$$= f^{-1}((A^c \cap B^c)^c) \cap f^{-1}((A \cap B)^c)$$

$$= [f^{-1}(A^c \cap B^c)]^c \cap [f^{-1}(A \cap B)]^c$$

$$= [f^{-1}(A^c) \cap f^{-1}(B^c)]^c \setminus f^{-1}(A \cap B)$$

$$= [f^{-1}(A^c)^c \cup f^{-1}(B^c)^c] \setminus [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)]$$

$$= [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)] \setminus [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)]$$

$$= f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$$

por (a)

c) pda: $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A)$

En efecto, $f(A \cup B) = f(A \cup B) \cap F$ $\swarrow$ cto de referencia / universo

$$= f(A \cup B) \cap [f(A)^c \cup f(A)]$$

$X \cup X^c = E$
referencia

$$= [f(A) \cup f(B)] \cap [f(A)^c \cup f(A)]$$

$\swarrow$ la union sale del cto imagen

$$= f(A) \cup [f(B) \cap f(A)^c]$$

$\swarrow$ distribución

$$= f(A) \cup [f(B) \setminus f(A)]$$

$\swarrow$ def de resta

$$= f(A) \cup \emptyset$$

$\swarrow$ Hip

$$= f(A)$$

P2] Sea Ω en $\mathbb{R}$, una relación tq $x \Omega y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$

pda: Ω es orden parcial

1) Refleja: pda $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \Omega x$

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, notemos que

$$x - x = 0 \in \mathbb{N} \quad \text{pero esto equivale a } x \Omega x$$

$\therefore \Omega$ es refleja

2) Antisimetrica: sea $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \Omega y \wedge y \Omega x$, pda: $x = y$

En efecto, como $x \Omega y \wedge y \Omega x \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N} \wedge x - y \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N} \wedge -(y - x) \in \mathbb{N}$$

luego, un número y su inverso aditivo vive en $\mathbb{N}$, pero la única manera que ocurra esto es si $y - x = 0$

$$\therefore y = x$$

Transitiva: sea $x, y, z \in \mathbb{R}$ $\neq$

$$x \leq y \wedge y \leq z \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N} \wedge z - y \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (z - y) + (y - x) \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow z - x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x \leq z$$

la suma de naturales es natural

$\therefore$ es transitiva y por ende de orden.

Falta ver que el orden es solo parcial, debemos probar que el orden total no se cumple, es decir, debemos probar que

$\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a \not\leq b \wedge b \not\leq a$. En palabras, debemos encontrar un par de números que no se puedan relacionar. Para esto, basta tomar $a=0$ y $b=\pi$ ya que

$$\pi - 0 = \pi \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 \not\leq \pi$$

$$\text{y } 0 - \pi = -\pi \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow \pi \not\leq 0$$

$\therefore$ el orden es solo parcial

P3] $T \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m T n \Leftrightarrow [m=n] \vee (2|n \wedge 2|m)$

pdq T es de equivalencia y $\mathbb{N}/T$

Refleja: sea $n \in \mathbb{N}$, es directo que $n=n$, luego $n T n$

{ojo! se debe cumplir que $n=n$ o $2|n \wedge 2|n$ pero siempre}
 {es cierto que $n=n$, por lo que nos basta con eso}

$\therefore$ es refleja

Simetria: sea $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $x T y$.

notar que $x T y \Leftrightarrow (x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)$

$\Leftrightarrow (y=x) \vee (2|y \wedge 2|x)$ Comuto

$\Leftrightarrow y T x$

Como se tiene que $x T y \Leftrightarrow y T x$, en particular
 se cumple que $x T y \Rightarrow y T x$ $\therefore$ es simetrica

Transitiva: [un poco más difícil] pdq $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ $x T y \wedge y T z \Rightarrow x T z$
 En efecto, sea x, y, z arbitrarios en $\mathbb{N}$ tales que

$$x T y \wedge y T z \Leftrightarrow [(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)] \wedge [(y=z) \vee (2|y \wedge 2|z)]$$

$$\Leftrightarrow [(x=y) \wedge (y=z)] \quad \{ (1) \}$$

$$\vee [(x=y) \wedge (2|y \wedge 2|z)] \quad \{ (2) \}$$

$$\vee [(2|x \wedge 2|y) \wedge (y=z)] \quad \{ (3) \}$$

$$\vee [(2|x \wedge 2|y) \wedge (2|y \wedge 2|z)] \quad \{ (4) \}$$

Hay que probar que en cualquier caso, si se cumple (1), (2), (3) o (4) se tendrá que $x \sim z$.

$$(1) \rightarrow \text{Como } x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow x \sim z$$

$$(2) \rightarrow \text{Como } x=y \wedge (2|y \wedge 2|z) \Rightarrow 2|x \wedge 2|z \\ \Rightarrow x \sim z$$

$$(3) \rightarrow \text{Como } (2|x \wedge 2|y) \wedge y=z \Rightarrow 2|x \wedge 2|z \\ \Rightarrow x \sim z$$

$$(4) \rightarrow \text{Como } (2|x \wedge 2|y) \wedge (2|y \wedge 2|z) \Rightarrow 2|x \wedge 2|z \\ \Rightarrow x \sim z$$

En cualquier caso se tiene que $x \sim z$

$\therefore$ es transitiva y por lo tanto de equivalencia.

Ahora hay que encontrar el cito cociente, por lo que debemos encontrar todas las clases de equivalencia. Interpretamos la relación $\sim$.

$$x \sim y \Leftrightarrow \underbrace{(x=y)}_{x \text{ e } y \text{ son iguales}} \vee \underbrace{(2|x \wedge 2|y)}_{\substack{x \text{ es par e} \\ y \text{ es par}}}$$

De aquí, solo con la definición, podemos decir que $2 \sim 4$, $2 \sim 6$, $2 \sim 8$, $2 \sim k$ con k par.

Recordemos que $[x]_{\sim} := \{n \in \mathbb{N} \mid x \sim n\}$

Es decir, la clase de x son todos los elementos que se relacionan con él.

Como vimos, el 2 cumple que se relaciona con cualquier $n \in \mathbb{N}$ par

$$\Rightarrow [2] = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

Esto lo podemos ver por definición ya que

$$[2] = \{n \in \mathbb{N} : 2 \sim n\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : 2=n \vee (2|2 \wedge 2|n)\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : 2=n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$$

$\hookrightarrow n$ es par

$$= \{2\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$$

$$= \{2\} \cup \{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

Notar que $[2]_{\sim} = [4]_{\sim}$ pues se relacionan con los mismos elementos. Para no ser redundantes y referirnos a esta clase, usaremos siempre $[2]_{\sim}$ donde 2 es el representante de la clase.

$$\text{Por otro lado } [1]_{\sim} = \{n \in \mathbb{N} : (n=1) \vee (\underbrace{2|1}_{\text{falso}} \wedge 2|n)\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : n=1\}$$

$$= \{1\}$$

$$\text{En general } [2k+1]_{\sim} = \{2k+1\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \mathbb{N}/_{\sim} = \{[2]\} \cup \{[2k+1] : k \in \mathbb{N}\}$$

P4] Recordar que $a \equiv_n c \Leftrightarrow \underbrace{a-c}_{\text{es equivalente}} = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} \quad a-c=2m \quad \wedge \quad b-d=3n$$

$$\Leftrightarrow a \equiv_2 c \quad \wedge \quad b \equiv_3 d$$

(i) por R es de equivalencia.

1) Refleja: $(a,b) R (a,b) \Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} \quad a-a=2m \quad \wedge \quad b-b=3n$

$$\Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} \quad 0=2m \quad \wedge \quad 0=3n$$

Lo cual es cierto ya que podemos tomar $m=n=0$.
 $\therefore$ es refleja

2) Simétrica: $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} \quad a-c=2m \quad \wedge \quad b-d=3n$

$$\Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} \quad c-a=2(-m) \quad \wedge \quad d-b=3(-n)$$

$$\Leftrightarrow \exists m',n' \in \mathbb{Z} \quad c-a=2m' \quad \wedge \quad d-b=3n'$$

$$\text{con } m' = -m \\ \text{y } n' = -n$$

$$\Leftrightarrow (c,d) R (a,b)$$

$\therefore$ es simétrica.

3) Transitiva: $(a,b) R (c,d) \quad \wedge \quad (c,d) R (e,f)$

$$\Leftrightarrow [\exists m,n \in \mathbb{Z} \quad a-c=2m \quad \wedge \quad b-d=3n] \quad \wedge \quad [\exists p,q \in \mathbb{Z} \quad c-e=2p \quad \wedge \quad d-f=3q]$$

$$\Rightarrow (a-c) + (c-e) = 2m + 2p \quad \wedge \quad (b-d) + (d-f) = 3n + 3q$$

$$\Rightarrow a-e = 2(m+p) \quad \wedge \quad b-f = 3(n+q)$$

$$\Leftrightarrow \exists k,l \in \mathbb{Z} \quad a-e=2k \quad \wedge \quad b-f=3l, \quad \begin{matrix} k=m+p \\ l=n+q \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) R (e,f)$$

$\therefore$ es transitiva y por lo tanto de equivalencia

notemos que $[0]_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\}$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x-0=2n \text{ para algun } n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{x=2n}_{x \text{ es par}}, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{0, -2, 2, -4, 4, \dots\}$$

y adem as $[1]_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\}$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x-1=2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{x=2n+1}_{x \text{ es impar}}, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{1, -1, 3, -3, 5, -5, \dots\}$$

Con estas 2 clases de equivalencia cubre todo $\mathbb{Z}$ usando $\equiv_2$
 Para $\equiv_3$ tengo $[0]_3, [1]_3, [2]_3$.

(ii) Encuentre $R/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

notemos que si $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \rightarrow [(a,b)]_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x,y)R(a,b)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x-a=2m \wedge y-b=2n, \text{ para } n,m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv_2 a \wedge y \equiv_3 b\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in [a]_2 \wedge y \in [b]_3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [a]_2\} \times \{y \in \mathbb{Z} \mid y \in [b]_3\} \\ &= [a]_2 \times [b]_3 \end{aligned}$$

Luego el qto cociente es $R/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\} \times \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$

$$\begin{aligned}
 \text{P5) a) } \sum_{k=p}^q \left(\frac{3}{p}\right)^k &= \sum_{k=0}^{q-p} \left(\frac{3}{p}\right)^{k+p} \\
 &= \sum_{k=0}^{q-p} \left(\frac{3}{p}\right)^k \left(\frac{3}{p}\right)^p \\
 &= \left(\frac{3}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{q-p} \left(\frac{3}{p}\right)^k = \left(\frac{3}{p}\right)^p \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{p}\right)^{q-p+1}}{1 - \left(\frac{3}{p}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sum_{k=m}^n (k-n)(k+2) &= \sum_{k=m}^n k^2 + (2-n)k - 2n \\
 &= \sum_{k=0}^n (k^2 + (2-n)k - 2n) - \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (k^2 + (2-n)k - 2n)}_{\text{B}} \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (2-n) \sum_{k=0}^n k - 2n \sum_{k=0}^n 1 - \text{B} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2-n)n(n+1)}{2} - 2n(n+1) - \text{B}
 \end{aligned}$$

$$\text{y } \text{B} = \frac{(m-1)m(2(m-1)+1)}{6} + \frac{(2-n)(m-1)m}{2} - 2n[m-1+1]$$

ustedes (si quieren) dejenlo bonito

$$\begin{aligned}
 c) \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
 &= \ln(n+1) - \ln(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-3} &= \sum_{k=3}^n \underbrace{b_k - b_{k-1} + b_{k-1} - b_{k-2} + b_{k-2} - b_{k-3}}_{\text{milita n'pone}} \\
 &= \sum_{k=3}^n (b_k - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_{k-2}) + (b_{k-2} - b_{k-3}) \\
 &= \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-1} + \sum_{k=3}^n b_{k-1} - b_{k-2} + \sum_{k=3}^n b_{k-2} - b_{k-3} \\
 &= b_n - b_2 + b_{n-1} - b_1 + b_{n-2} - b_0
 \end{aligned}$$

e) Ustedes.

1º: factorizar el denominador por $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}$

2º: racionalizar

3º: encontrar telescópica