MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 7: Relaciones

30 de Abril de 2019

P1. Sea $f : E \to F$ una función:

a) pruebe que $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

b) pruebe que $\forall A \subseteq F,\ \forall B \subseteq F,\ f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$

c) Sea $A, B \subseteq E$, demuestre que si $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Longrightarrow f(A \cup B) = f(A)$

P2. Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ω dada por: $x \Omega y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$.
Demuestre que Ω es una relación de orden parcial.

P3. Se define en $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{T}$ tal que: $m \mathcal{T} n \iff (m = n) \vee (2|n \wedge 2|m)$. Demuestre que $\mathcal{T}$ es de equivalencia y encuentre $\mathbb{N}/\mathcal{T}$

P4. Se considera en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$(a, b)\, \mathcal{R}\, (c, d) \ \Leftrightarrow \ \text{tal que } \ a \equiv_2 c \wedge b \equiv_3 d$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Encuentre el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{R}$.

P5. Calcule

a) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \left(\frac{3}{p}\right)^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (k - n)(k + 2)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln(1 + \frac{1}{k})$

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} b_k - b_{k-3}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k + 1) + k\sqrt{k + 1}}$

- (En el curso) Diremos que $\mathcal{R}$ es una relación sobre A si se cumple que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$
- **Propiedades**. una relación $\mathcal{R}$ en A es:
  1. **refleja** si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
  2. **simétrica** si $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
  3. **antisimétrica** si $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
  4. **transitiva** si $\forall x, y, z \in A,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

  Obs: una relación puede ser simétrica y antisimétrica a la vez, no son definiciones excluyentes.
- $\mathcal{R}$ es de equivalencia si es refleja, simetrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$ es de orden (o simplemente le llamamos orden) si es refleja, antisimetrica y transitiva.
  Se dice que x e y son comparables si se cumple que $x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$.
  Se dice que $\mathcal{R}$ es orden total si $\forall x, y \in A$, x e y son comparables.
- Sea $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a asociada a $\mathcal{R}$ como el conjunto

  $$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\} \subseteq A$$

  Obs: si $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ entonces $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$
- Al conjunto de todas las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama **conjunto cuociente**, y se denota $A/\mathcal{R}$ y es tal que:

  $$A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$
- Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre A. Para todo $x, y \in A$ se tiene que:

  $$[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}} \iff [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \iff x\mathcal{R}y$$
- $A/\mathcal{R}$ es una partición de A
- $a \equiv_n b \iff \exists q \in \mathbb{Z},\ a - b = qn$
- $\equiv_n$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.
  El conjunto cuociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ lo escribiremos como $\mathbb{Z}_n$ y equivale a

  $$\mathbb{Z}_n = \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\}$$
- Teorema: si $n \geq 1$, entonces $\mathbb{Z}_n$ tiene n elementos, y son tal que:

  $$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n &= \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\} \\ &= \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \dots, [n-1]_n\} \end{aligned}$$
- $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{(p+1)} + a_{(p+2)} + \cdots + a_{(q-1)} + a_q$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k \pm b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
- **Traslación de índices**

  $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k \quad \text{para } m \leq s < n$
- **telescópica:**

  $$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

  obs: para las 3 sumas anteriores, si parten de 0 o de 1 es la misma formula
- **Geometrica:**

  $$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

  para $r \neq 1$