MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Relaciones

1. Resumen

- Dados dos conjuntos no-vacíos A y B, diremos que $\mathcal{R}$ es una relación en $A \times B$ si $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Denotaremos $a\mathcal{R}b$ cuando $(a,b) \in \mathcal{R}$. Si $A = B$ simplemente diremos que $\mathcal{R}$ es una relación en A.

- Sea $\mathcal{R}$ un relación en A, diremos que $\mathcal{R}$ es:

  1. **Refleja** si y sólo si:
  $$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}x)$$
  2. **Simétrica** si y sólo si:
  $$(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$$
  3. **Antisimétrica** si y sólo si:
  $$(\forall x, y \in A)([x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x] \implies x = y)$$
  4. **Transitiva** si y sólo si:
  $$(\forall x, y, z \in A)([x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z] \implies x\mathcal{R}z)$$

- Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, diremos que $\mathcal{R}$ es un orden en A si es una relación refleja, antisimétrica y transtiva. Si además $\mathcal{R}$ verifica la propiedad:
$$(\forall a, b \in A)(a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$$
lo llamaremos orden total, de no cumplir esto lo llamaremos de orden parcial.

- Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, diremos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva.

- Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Para todo $a \in A$ definimos la clase de equivalencia de a como:
$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A : a\mathcal{R}x\}$$
Y construiremos el conjunto cuociente como:
$$A/\mathcal{R} = \{X \subseteq A : \exists x \in A, X = [x]_{\mathcal{R}}\}$$
Es decir el conjunto de las clases de equivalencias.

- Sean $x, y \in A$ y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, entonces:

  1. $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
  2. $x\mathcal{R}y \iff [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.
  3. $\overline{(x\mathcal{R}y)} \iff [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$

- Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia, entonces $A/\mathcal{R}$ es una partición de A.

- Si $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i\in I}$ una partición de A, entonces $\mathcal{R}$ definida por:

$$x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I \text{ tal que } x, y \in P_i$$

es una relación de equivalencia.

- Ejemplos importantes de relaciones:

$$x \equiv_n y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x - y = kn$$
$$x|y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = kx$$

- **Teo. de la división** Sean $a, m \in \mathbb{Z}$. Existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qm + r$ y $0 \leq r < |m|$.

2. Ejemplo

2.1. [Relaciones de proposiciones lógicas]

Sobre un conjunto de proposiciones lógicas $\mathcal{P}$, se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q).$$

Además, para $p, q \in \mathcal{P}$ se dice que $p = q$ si y sólo si $p \Leftrightarrow q$.

1. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden sobre $\mathcal{P}$.
2. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.

Solución 1.

1. *Demostremos que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva. Consideremos $p, q \in \mathcal{P}$*

    - ***Refleja:*** *Debemos probar que $p\mathcal{R}p$ para p arbitrario. Notemos que por lo visto de lógica al comienzo del curso tenemos que*

    $$(p \wedge p) \iff p$$

    Es tautologia (siempre ocurre lo anterior). Pero esto es la definición de $p\mathcal{R}p$. Por lo tanto se cumple la reflexividad ya que lo anterior se cumple para todo p.

    - ***Antisimétrica:*** *debemos probar que $(\forall p, q \in \mathcal{P})([p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p] \implies p = q)$. Supongamos $p\mathcal{R}q$ y que $q\mathcal{R}p$, para p y q arbitrarios. Entonces tenemos que:*

    $$(p \wedge q) \iff q \quad \text{y que} \quad (q \wedge p) \iff p$$

    Respectivamente, en ese orden. De la equivalencia de la izquierda sabemos que q queda interpretrado univocamente por $p \wedge q$, es decir, $(p \wedge q) = q$, si esto lo reemplazamos en la equivalencia de la derecha obtenemos que $(q \wedge p) \iff p$ es lo mismo que $q \iff p$.
    Luego si $p = V$, entonces $q = V$ análogamente si $p = F$ entonces $q = F$. Concluimos que $p = q$ (esta parte no es necesaria, se podia concluir al final del parrafo anterior).

- ***Transitiva:*** *Supongamos* $p\mathcal{R}q$ *y que* $q\mathcal{R}r$, *debemos probar que* $p\mathcal{R}r$. *Entonces por nuestra hipotesis tenemos que*

$$\underbrace{(p \wedge q) \iff q}_{(1)} \quad \text{y que} \quad \underbrace{(q \wedge r) \iff r}_{(2)}$$

Reemplazando (1) *en* (2) *tenemos:*

$$\underbrace{(p \wedge q \wedge r) \iff r}_{(3)}$$

Donde simplemente reemplazamos el valor de q *que nos da* (1) *en la expresión* (2). *Luego, podemos usar* (2) *en el resultado que obtuvimos en* (3), *por lo que vamos a reemplazar el valor de* $(q \wedge r)$ *por* r *(pues por* (2) *son equivalentes). Entonces tenemos que:*

$$(p \wedge r) \iff r$$

Es decir, obtuvimos $p\mathcal{R}r$.

2. *Notemos que como las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas basta con chequear casos, Debemos ver que* V *se puede relacionar por izquierda o por derecha con* V *y* F *(da lo mismo el lado) y lo mismo para* F, *que se debe relacionar con* V *y* F *por algun lado de la relación. Cuando digo un lado significa que puede ser* $X\mathcal{R}Y$ *o* $Y\mathcal{R}X$.

   Notemos que como son pocos lo podemos chequear uno a uno. Notemos que como $V\mathcal{R}V$ *y* $F\mathcal{R}F$ *por reflexividad. Por lo que solo resta chequear que* $F\mathcal{R}V$ *o que* $V\mathcal{R}F$. *En efecto esta última es verdadera pues:*

$$V\mathcal{R}F \equiv [(V \wedge F) \iff F] \equiv [F \iff F] \equiv V$$

   Luego como todos los elementos son comparables (se pueden relacionar de alguna forma), el orden es total.