MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 6: Funciones II y Relaciones

23 de Abril de 2019

P1. Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $f(X,Y) = X \setminus Y$.

a) Determine $f(\{(\mathcal{U},\emptyset),(\emptyset,A),(A,\emptyset)\})$. con $A \subseteq \mathcal{U}$

b) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U},\emptyset\}) = \{(\mathcal{U},\emptyset)\} \cup \{(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid X \subseteq Y\}$.

c) Determine $f(D)$ donde $D = \{(X,X) : X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})\}$

P2. Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

a) Sea $A \subseteq G$. Probar que:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

b) Sea $B \subseteq F$. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P3. Sea $f : E \to F$ una función:

a) pruebe que $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

b) pruebe que $\forall A \subseteq F,\ \forall B \subseteq F,\ f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$

c) Sea $A, B \subseteq E$, demuestre que si $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Longrightarrow f(A \cup B) = f(A)$

P4. Se define en $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{T}$ tal que: $m\mathcal{T}n \Longleftrightarrow (m = n) \vee (2|n \wedge 2|m)$. Pruebe que es de equivalencia.

P5. Se define en $\mathbb{R}$ la relacion Ω dada por: $x\Omega y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$.
Demuestre que Ω es una relación de orden parcial.

- Sea $f : A \to B$ y $A' \subseteq A$ se define el conjunto imagen de A' por f como

$$\begin{aligned} f(A') = & \quad \{y \in B : \exists x \in A', f(x) = y\} \\ = & \quad \{f(x) \in B : x \in A'\} \\ = & \quad \bigcup_{x \in A'} \{f(x)\} \end{aligned}$$

- $f : A \to B$ es epiyectiva $\Longleftrightarrow f(A) = B$

- Sea $f : A \to B$ y $A_1, A_2 \subseteq A$ se tiene que:

  1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
  2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
  3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

- Sea $f : A \to B$ y $B' \subseteq B$ se define el conjunto imagen de B' por f como

$$\begin{aligned} f^{-1}(B') = & \quad \{x \in A : f(x) \in B'\} \\ = & \quad \bigcup_{y \in B'} f^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

- **OBSERVACIÓN**: es muy importante notar la siguiente equivalencia.

$$x \in f^{-1}(B') \Longleftrightarrow f(x) \in B'$$

  Además se tiene que:

$$x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A)$$

- Sea $f : A \to B$ y $B_1, B_2, B' \subseteq B$ se tiene que:

  1. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
  2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
  3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
  4. $A' \subseteq A \Longrightarrow A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
  5. $B' \subseteq B \Longrightarrow f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$

- (En el curso) Diremos que $\mathcal{R}$ es una relación sobre A si se cumple que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$

- **Propiedades**. una relación $\mathcal{R}$ en A es:

  1. **refleja** si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
  2. **simétrica** si $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
  3. **antisimétrica** si $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
  4. **transitiva** si $\forall x, y, z \in A,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

  Obs: una relación puede ser simétrica y antisimétrica a la vez, no son definiciones excluyentes.

- $\mathcal{R}$ es de equivalencia si es refleja, simetrica y transitiva.

- $\mathcal{R}$ es de orden (o simplemente le llamamos orden) si es refleja, antisimetrica y transitiva. Se dice que x e y son comparables si se cumple que $x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$.
  Se dice que $\mathcal{R}$ es orden total si $\forall x, y \in A$, x e y son comparables.