Auxiliar 5

Resumen: $f: A \to B$

Dominio   Codominio

Inyectiva: f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

¿Como demuestro que f es inyectiva?

Estructura: PDQ: $\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

En efecto, sea $\underset{\text{Lo arbitrarios}}{x_1, x_2 \in A}$ tal que $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{Asumimos Hip}}$

Luego

$$
\begin{aligned}
& f(x_1) = f(x_2) && \text{operación 1} \\
\Rightarrow\ & \ldots = \ldots && \text{operación 2} \\
\Rightarrow\ & \ldots = \ldots && \text{operación 3} \\
\Rightarrow\ & x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

Epiyectiva: f es epiyectiva $\Leftrightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A\ f(x) = y$

$\Leftrightarrow$ dado cualquier elemento en el codominio siempre será posible encontrar su parejita.

¿Como lo demuestro?

Estructura: PDQ: $\forall y \in B\ \exists x \in A\ f(x) = y$

En efecto, sea $y \in B$ arbitrario, basta tomar

$x = \text{blabla}(y) \rightarrow$ valor que depende de y

Luego evaluando en $f()$ se obtiene

$$f(x) = f(\text{blabla}(y)) = y$$

Veamos un ejemplo

PDQ: $f(x)=ax+b$, con $a\neq 0$ es biyectiva, es decir, pruebe que es inyectiva y epiyectiva, donde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Inyectiva: PDQ $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

Sea $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tal que $f(x_1)=f(x_2)$ definición

$$\Leftrightarrow ax_1+b=ax_2+b \quad / -b$$

$$\Leftrightarrow ax_1=ax_2 \quad / \cdot\frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow x_1=x_2$$

$\therefore$ f es inyectivo

Epiyectivo: PDQ $\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}$ $f(x)=y$

En efecto, sea $y\in\mathbb{R}$, en el codominio, arbitrario

basta tomar $x=\frac{y-b}{a}$ expresión de "y"

Luego $f(x)=f\left(\frac{y-b}{a}\right)=\cancel{a}\left(\frac{y-b}{\cancel{a}}\right)+b$

$$= y-\cancel{b}+\cancel{b}$$

$$= y$$

$\therefore$ si quiero obtener el valor y, basta tomar el valor $x=\frac{y-b}{a}$, luego f es epiyectiva y como es inyectiva $\Rightarrow$ f es biyectiva

$\boxed{P1}$ sea $A \subseteq E$, $f: P(E) \to P(E)$, $f(X) = X \Delta A$

PDQ: f es biyectiva y calcular f^{-1}

Inyectiva: Sea $X_1, X_2 \in P(E)$ tq $f(X_1) = f(X_2)$

$$\Rightarrow \quad f(X_1) = f(X_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad X_1 \Delta A = X_2 \Delta A \quad / \Delta A$$

$$\Rightarrow \quad (X_1 \Delta A) \Delta A = (X_2 \Delta A) \Delta A$$

Asocio

$$\Rightarrow \quad X_1 \Delta (A \Delta A) = X_2 \Delta (A \Delta A)$$

$A \Delta A = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad X_1 \Delta \emptyset = X_2 \Delta \emptyset$$

$X \Delta \emptyset = X$

$$\Rightarrow \quad X_1 = X_2$$

Luego f es inyectiva

Epiyectiva: Sea $Y \in P(E)$ arbitrario, PDQ: $\exists X \in P(E)$ tq $f(X) =$

En efecto, basta tomar $X = Y \Delta A$, donde $Y \Delta A \in P(E)$ ya que $Y \in P(E)$ y $A \in P(E)$.

Luego, debemos verificar.

$$\begin{aligned} f(X) = f(Y \Delta A) &= (Y \Delta A) \Delta A \\ &= Y \Delta (A \Delta A) \\ &= Y \Delta \emptyset \\ &= Y \end{aligned}$$

$\therefore$ es epiyectiva

Encontremos f^{-1}...

Debemos obtener $g(X) = \text{Algo}$, tal que

1) i) $\forall X \in P(E) \quad g(f(X)) = X$

ii) $\forall Y \in P(E) \quad f(g(Y)) = Y$

o bien

Se cumplan 2 de los sgte

1) $g \circ f = id_{P(E)}$

2) $f \circ g = id_{P(E)}$

3) g es biyectiva

haremos lo de que se cumplan 2 de 3.

Notemos que
$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= f(f(X)) \\ &= f((X \Delta A)) \\ &= (X \Delta A) \Delta A \\ &= X \Delta (A \Delta A) \\ &= X \Delta \emptyset \\ &= X \quad \text{, para } X \in P(E) \text{ arbitrario} \end{aligned}$$

Es decir $f \circ f = Id_{P(E)}$

y f es biyectiva. Luego si tomo $g = f$

Se tiene que $g \circ f = Id_{P(E)}$ y g es biyectiva

por lo que se cumplen 2 de 3 propiedades

$$\Rightarrow \quad g = f^{-1} = f$$

$\boxed{P2}$ $\varphi : F \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(0)$ $\forall f \in F$

PDQ: φ es epiyectiva

En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, necesito encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(0) = \alpha$. Por simplicidad podemos tomar la sgte función $\bar{f}(x) = x + \alpha$, luego $\bar{f}(0) = 0 + \alpha$
$= \alpha$

$\Rightarrow$ encontre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(0) = \alpha$

Luego si quiero tener $\alpha \in \mathbb{R}$, basta tomar $f(x) = x + \alpha$
$\downarrow$
con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Luego $\varphi(f) = f(0) = \alpha$

$\therefore$ φ es epiyectiva.

$\boxed{P3}$ $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ es biyectiva $\}$

$\psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por

$$\psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) PDQ: ψ esta bien definida $\forall f,g \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$

Lo que debemos hacer es ver que $\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, se tiene que $\psi(f,g) \in \mathcal{F}$, es decir, tiene sentido el codominio

En efecto, sea $f,g \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ arbitrario, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ya que viven en $\mathcal{F}$ ambos

$\Rightarrow$ $f \circ g$ existe y $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ademas $f \circ g$ es biyectiva al ser composición de biyectivas $\Rightarrow$ existe $(f \circ g)^{-1}$ y como f y g son son biyectivas $\Rightarrow$ $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ donde $(f \circ g)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pues $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y como $f \circ g$ es biyectiva $\Rightarrow$ $(f \circ g)^{-1}$ tambien

Luego $\psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$ es biyectiva y va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$\therefore$ esta bien definida pues $\psi(f,g)$ es tal que $\psi(f,g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y es biyectiva $\Rightarrow$ $\psi(f,g) \in \mathcal{F}$

b) Inyectividad: no es inyectiva ya que hay 2 pre-imagenes que dan la misma imagen.

En efecto, no es inyectiva, basta toma $(f, id_{\mathbb{R}})$ y $(id_{\mathbb{R}}, f)$, Luego

$$\psi(f, id_{\mathbb{R}}) = (f \circ id_R)^{-1} = f^{-1}$$

$$\psi(id_R, f) = (id_R \circ f)^{-1} = f^{-1}$$

Luego no es inyectiva

Epiyectiva: Si es, PDQ $\forall h \in F, \exists (f,g) \in F \times F \ \psi(f,g) = h$

En efecto, sea $h \in F$ en el Codominio, basta tomar la pre imagen $(id_{\mathbb{R}}, h^{-1})$ donde $id_{\mathbb{R}} \in F$ y $h^{-1} \in F$ pues h es biyectiva.

Luego $\psi(id_R, h^{-1}) = (id_R \circ h^{-1})^{-1} = (h^{-1})^{-1} = h$

c) PDQ $\psi(\psi(f,g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$

Partamos de la izq

$$\psi(\psi(f,g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = \psi((f \circ g)^{-1}, (g^{-1} \circ f^{-1})^{-1})$$

$$= \psi(g^{-1} \circ f^{-1}, f \circ g)$$

$$= ((g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g))^{-1}$$

$$= (g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g)^{-1}$$

$$= ((g^{-1} \circ id_{\mathbb{R}}) \circ g)^{-1}$$

$$= (g^{-1} \circ g)^{-1}$$

$$= id_{\mathbb{R}}^{-1}$$

$$= id_{\mathbb{R}} \quad \blacksquare$$

P4 $f: A \to B$, $g: B \to A$ y $h: B \to B$

1. h biyectiva
2. $f \circ g = h$
3. $g \circ f = id_A$

PDQ: f y g son biyectivas y h es id_B

En efecto, de 2 y de 1 se tiene que h es biyectiva y como $f \circ g = h$, se tiene que $f \circ g$ es biyectiva (Lógico, si es igual a una función biyectiva)

$\Rightarrow$ $f \circ g$ es biyectiva $\Longleftrightarrow$ $f \circ g$ es inyectiva y epiyectiva

$\overset{\text{TEOREMA}}{\Rightarrow}$ g es inyectiva, f epiyectiva

Por otro lado, de 3 como $g \circ f = id_A$ y id_A es biyectiva $\Rightarrow$ $g \circ f$ es biyectiva

Como $g \circ f$ es biyectiva $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ es inyectiva y epiyectiva
$\Rightarrow$ f es inyectiva y g epiyectiva

Luego f es inyectiva y epiyectiva $\Rightarrow$ f biyectiva
y g es inyectiva y epiyectiva $\rightarrow$ g biyectiva

Falta ver que $h = id_B$, primero $h : B \to B$ y
$id_B : B \to B$ por lo que $Dom(h) = Dom(id_B) = B$
$\wedge$ $Codom(h) = Codom(id_B = B$

Falta ver que $\forall x \in B$ $h(x) = id_B(x) = x$. Dos formas

Forma 1) Con MATRACA

de 2) $f \circ g = h$ $/ g \circ$

$\Rightarrow$ $(g \circ f) \circ g = g \circ h$

$\Rightarrow$ $id_A \circ g = g \circ h$ numero $\boxed{3}$

$\Rightarrow$ $g = g \circ h$ $/ g^{-1} \circ$

$\Rightarrow$ $g^{-1} \circ g = (g^{-1} \circ g) \circ h$ $\quad g^{-1} \circ g = id_B$

$\Rightarrow$ $id_B = id_B \circ h$

$\Rightarrow$ $id_B = h$

(1)

Forma 2) Calculo de inversa

Probemos que $f = g^{-1}$ (o bien $g = f^{-1}$)

Como $f : A \to B$ y $g : B \to A$ y se cumple que

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = id_A \\ \wedge \quad f \text{ es biyectiva} \end{array}\right\} \text{ se cumplen 2 de 3 segun proposición}$$

$\Rightarrow \quad f = g^{-1}$ ó bien $g = f^{-1}$

Luego por $\boxed{2}$ $h = f \circ g$

$= f \circ f^{-1}$

$= id_B$

$\blacksquare$

P2) $P_F(\mathbb{N}) = \{A_k \subseteq \mathbb{N} : A_k$ finito con k elementos, $k \in \mathbb{N}$ y $A_k \neq \emptyset\}$

$$f : P_F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$$
$$A_k \mapsto f(A_k) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k \qquad n_i \neq n_j$$

Pdq f es epiyectiva pero no biyectiva

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, basta tomar $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$, por lo tanto $\{n\} \in P_F(\mathbb{N})$, para que $f(\{n\}) = n$ pues es la suma de todos los elementos y bueno... tengo uno solo.
De esta forma f es epiyectiva ✓

f no es inyectiva (y por ende no puede ser biyectiva), ya que $f(\{2,3\}) = f(\{1,4\}) = 5$, ~~luego~~ Es decir encontre 2 preimagenes distintas que tienen la misma imagen por lo que no puede ser inyectiva