

Auxiliar 4

$(P_1) \quad A, B \subseteq E, \quad C, D \subseteq F$

a) pda $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

En efecto, sea $(\alpha, \beta) \in (A \cup B) \times C$

$$\Leftrightarrow \alpha \in A \cup B \quad \wedge \quad \beta \in C \quad / \text{ def de prod cruz}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha \in A \vee \alpha \in B] \wedge \beta \in C \quad / \text{ def Union}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha \in A \wedge \beta \in C] \vee [\alpha \in B \wedge \beta \in C] \quad / \text{ Distribución de } \wedge \text{ con } \vee$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in A \times C \vee (\alpha, \beta) \in B \times C \quad / \text{ def prod cruz}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in (A \times C) \cup (B \times C) \quad / \text{ def union}$$

$$\therefore (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

b) pda $A \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D)$

En efecto, sea $(x, y) \in A \times (C \cap D)$ arbitrario

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \cap D \quad / \text{ def prod cruz}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge [y \in C \wedge y \in D] \quad / \text{ def intersección}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge y \in C \wedge y \in D \quad / \begin{matrix} P \Leftrightarrow P \wedge P \\ \text{Esto dice que si repito} \\ \text{mi información, quedo} \\ \text{en la misma situación} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in C] \wedge [x \in A \wedge y \in D] \quad / \text{ conmuta y asocio}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in A \times D$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (A \times D)$$

$$\therefore A \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D)$$

Recuerdo $A = B \Leftrightarrow [\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B]$
 $\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

arbitrario

~~arbitrario~~

P2 $A, B \subseteq U$

a) p.d.q: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow$ Supongamos que $A \cap B = \emptyset$, debemos probar que $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

En efecto, $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ / Propiedad de
 $= P(\emptyset)$ / ante $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
 $= \{\emptyset\}$ / hipotesis

$\therefore P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

/ $\emptyset$ es el unico
Subconjunto de $\emptyset$

$\Leftarrow$ debemos probar que $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$,
 lo haremos por contrareciproca, es decir probaremos que

P.D.Q: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A) \cap P(B) \neq \{\emptyset\}$

Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in A \cap B$, pues
 al ser distinto de vacio debe existir algun elemento.

$\Rightarrow$ si $\exists x \in A \cap B$, como $x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \quad \wedge \quad \{x\} \subseteq B$

$\Rightarrow \{x\} \in P(A) \quad \wedge \quad \{x\} \in P(B)$

$\Leftrightarrow \{x\} \in P(A) \cap P(B)$

$\Rightarrow P(A) \cap P(B) \neq \{\emptyset\}$, ya que al menos

se que $\{x\}$ es elemento de $P(A) \cap P(B)$,

es decir $\{\{x\}\} \subseteq P(A) \cap P(B)$ y si $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$ eso
 Jamás pasaria.

P2) 6) por $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$

Antes de empezar, recordemos que se tiene lo sgte

$$[p \vee q \Rightarrow r] \Leftrightarrow [[p \Rightarrow r] \wedge [q \Rightarrow r]]$$

Es decir si queremos probar que una disyunción implica "algo", debemos probar que cada proposición que participa en la disyunción tiene que implicar ese "algo" por sí solo.

Lo haremos por doble implicancia

$\Leftarrow$ debemos probar que $[A \subseteq B \vee B \subseteq A] \Rightarrow P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

y por el recordo debemos ver que puede llegar a la tesis partiendo de $\underbrace{A \subseteq B}_{(1)}$ por sí solo y luego con $\underbrace{B \subseteq A}_{(2)}$.

Entonces, supongamos primero que $A \subseteq B$. Recordemos que por apunte $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ así que solo debemos probar que $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ y concluir por doble inclusión.

En efecto, notar que $P(B) \subseteq \underbrace{P(A) \cup P(B)}_{\text{agrandando el cto}} \quad (*)$

y además $A \cup B = B$ pues $A \subseteq B$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(B) \quad (B)$

Juntado $(*)$ y (B) se tiene que

$\underbrace{P(B)}_{(B)} = \underbrace{P(A \cup B)}_{(*)} \subseteq P(A) \cup P(B)$

$$\therefore \text{ como } P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$$

$$\wedge P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

$$\text{se tiene que } P(A \cup B) = P(A) \cup P(B).$$

2] Ahora falta ver lo mismo pero suponiendo que $B \subseteq A$.
Analogamente $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ por apunte.

Además

$$\underbrace{P(A \cup B) = P(A)}_{B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A} \subseteq \underbrace{P(A) \cup P(B)}_{\text{agrandando el c.j.to}}$$

Luego, por el mismo argumento anterior $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

$\Rightarrow$ por contrareciproca

$$\text{PDQ: } [A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A] \Rightarrow P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$$

Supongamos que $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$, notar que

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \exists x : x \in A \wedge x \notin B \\ \Leftrightarrow \exists x : x \in A \setminus B.$$

Entonces, por hipotesis sabemos que $\underbrace{\exists a \in A \setminus B}_{A \not\subseteq B}$ y $\underbrace{\exists b \in B \setminus A}_{B \not\subseteq A}$

$\rightarrow a \in A \cup B \wedge b \in A \cup B$, luego $\{a, b\} \subseteq A \cup B \Leftrightarrow \{a, b\} \in P(A \cup B)$

PERO, $\{a, b\} \not\subseteq A$ pues $b \notin A$ y $\{a, b\} \not\subseteq B$ pues $a \notin B$
entonces $\{a, b\} \notin P(A)$ y $\{a, b\} \notin P(B)$ respectivamente

Esto quiere decir que $\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$ pues ni en $P(A)$ ni $P(B)$ esta $\{a, b\}$. $\therefore P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

P3 $P = \{X \mid X = \{-n, n\} \wedge n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

pdg: P es particion de $\mathbb{Z}$, es decir debemos probar que

1) $\forall X \in P, X \neq \emptyset$

2) $\forall X_1, X_2 \in P \quad X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset$

3) $\bigcup_{X \in P} X = \mathbb{Z}$

1) sea $X \in P$ arbitrario, como $X \in P$ entonces $X = \{-n, n\}$ para algun $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como $\{-n, n\} \neq \emptyset$ se tiene que $X \neq \emptyset$

[Lojo el paratodo pasa a existe]

2) Por contradicción, sea $X_1, X_2 \in P$ los elementos que cumplen que $X_1 \neq X_2 \wedge X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Como $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset, \exists a \in X_1 \cap X_2$

$\Rightarrow a \in X_1 \wedge a \in X_2$

$\Rightarrow X_1 = \{-a, a\} \wedge X_2 = \{-a, a\}$

$\Rightarrow X_1 = X_2 = \{-a, a\}$

$\Rightarrow \Leftarrow$

ya que X_1 era distinta de X_2
por hipotesis

Como en X vive un número y su inverso aditivo, sabemos que si $a \in X$ entonces el otro elemento debe ser $-a$

3) por $\bigcup_{X \in P} X = \mathbb{Z}$, por doble inclusión

⊂] sea $n \in \bigcup_{X \in P} X \Rightarrow \exists X' \in P$ tal que $n \in X'$

y por definición $X' = \{-n, n\}$ donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

o $-n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en cualquier caso $n \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \bigcup_{X \in P} X \subseteq \mathbb{Z}$$

⊃] sea $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-k, k\}$ y por definición $\{-k, k\} \in P$ por lo tanto participa en la unión grande

$$\Rightarrow \{-k, k\} \subseteq \bigcup_{X \in P} X$$

$$\Rightarrow k \in \bigcup_{X \in P} X$$

$$\therefore \bigcup_{X \in P} X = \mathbb{Z}$$

P4 $L_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+n \} \quad n \in \mathbb{R}$

$C = \{ L_n \mid n \in \mathbb{R} \}$

PDQ C es particion de $\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} y = x+n \\ n = 0+n \end{cases} \rightarrow (0,n)$
 $\uparrow$

(i) Sea $L_n \in C$ con $n \in \mathbb{R}$, notar que $(0,n) \in L_n$

$\Rightarrow L_n \neq \emptyset$ pues tiene al menos el $(0,n)$

(ii) Sea L_n y L_m arbitrarios tal que $L_n \neq L_m$,

luego como $L_n \neq L_m$ y tienen la misma pendiente pero diferente coef de posición se cumple que

$L_n \parallel L_m$ por lo que L_n no se toca

con $L_m \Rightarrow L_n \cap L_m = \emptyset$

(iii) porq $\bigcup_{L_n \in C} L_n = \mathbb{R}^2$

$\exists$ por definición $\forall n \in \mathbb{R} \quad L_n \subseteq \mathbb{R}^2$ donde $\mathbb{R}^2$ es el cjt^o

de referencia $\Rightarrow \bigcup_{L_n \in C} L_n \subseteq \mathbb{R}^2$ recordar que $A \subseteq B$
 $D \subseteq B$
 $\Rightarrow A \cup D \subseteq B$

2 Sea $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, este punto vive en la recta

$y - \beta = 1(x - \alpha) \Leftrightarrow y = x - \alpha + \beta := L_{-\alpha+\beta}$

la que por definición vive en C es decir, $L_{-\alpha+\beta} \in C$

$\Rightarrow L_{-\alpha+\beta} \subseteq \bigcup_{L_n \in C} L_n \quad \therefore (\alpha, \beta) \in \bigcup_{L_n \in C} L_n$