MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 5: Funciones

16 de Abril de 2019

P0. *a)* Probar que $P = \{X : X = \{-x, x\} \text{ y } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

b) Dado $n \in \mathbb{R}$ define el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\}$$

Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ es partición del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

P1. Sea E un conjunto y A un subconjunto de E. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X \triangle A$ para todo $X \subseteq E$. Probar que f es biyectiva y determine la función inversa de f.

P2. Sea $\mathcal{P}_F(\mathbb{N}) = \{A_k \subseteq \mathbb{N} : A_k \text{ es finito con } k \text{ elementos}, k \in \mathbb{N} \text{ y } A_k \neq \emptyset\}$ y considere f definido por:

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) &\to \mathbb{N} \\ A_k &\mapsto f(A_k) = n_1 + n_2 + n_3 \cdots + n_k,\ n_i \neq n_j\ \forall i, j \end{aligned}$$

Es decir, es la suma de los k elementos de A_k. Ejemplo $f(\{0, 2, 4\}) = 6 = 0 + 2 + 4$.
Demuestre f que es epiyectiva pero no biyectiva.

P3. Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función epiyectiva.

P4. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva }\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Demuestre que Ψ esta bien definido $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$

b) Estudie inyectividad y epiyectividad de Ψ

c) Demuestre que, para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

P5. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$, $g : B \to A$ y $h : B \to B$ funciones tales que:

- h es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = id_A$

I) Demuestre que f y g son biyectivas y que $h = id_B$

II) ¿Se sigue cumpliendo lo anterior si h se supone solamente sobreyectiva?

- Llamaremos función de A en B a cualquier $f \subseteq A \times B$ tal que:

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B) \quad (a,b) \in f$$

  Si f es una función de A en B lo anotaremos como $f : A \to B$, de igual manera si $(a,b) \in f$ lo anotaremos $f(a) = b$.

- Si $f : A \to B$ al conjunto A lo llamaremos dominio de f y a B lo llamaremos el codominio de f.

- Sea $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones, entonces $f = g$ es equivalente con

$$\begin{array}{c} Dom(f) = Dom(g) \\ \wedge \\ Cod(f) = Cod(g) \\ \wedge \\ \forall x \in Dom(f), f(x) = g(x) \end{array}$$

- Una función $f : A \to B$ es inyectiva $\iff$

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Una función $f : A \to B$ es epiyectiva $\iff$

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

- Una función $f : A \to B$ es biyectiva $\iff$ es inyectiva y epiyectiva al mismo tiempo $\iff$ $\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$

- Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces existe $f^{-1} : B \to A$ dada por:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

- Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : B \to A$ es tal que:

  1. $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$.
  2. $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$.

- Sea $f : A \to B$ y $g : B' \to C$, luego $g \circ f$ tendrá sentido si $B \subseteq B'$ donde

$$(g \circ f) : A \to C$$

- $\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

- Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces

$$f \circ f^{-1} = id_B \ \wedge \ f^{-1} \circ f = id_A$$

- Para $f : A \to B$, las funciones identidades, $id_A : A \to A$, $id_B : B \to B$ actúan como neutros, es decir

  - $id_B \circ f = f$
  - $f \circ id_A = f$

- $\circ$ es asociativa, es decir,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Se tienen las siguientes propiedades:

  1. f y g son inyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es inyectiva
  2. f y g son epiyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es epiyectiva
  3. f y g son biyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es biyectiva
  4. $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva (g no necesariamente)
  5. $g \circ f$ es epiyectiva $\Rightarrow g$ es epiyectiva (f no necesariamente)

- Si f es biyectiva, entonces f^{-1} tambien es biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$

- Sea $f : A \to B$ y $g : B \to A$ si se cumplen dos de las siguientes condiciones, entonces que f es biyectiva y $f^{-1} = g$.

  1. $g \circ f = id_A$
  2. $f \circ g = id_B$
  3. g es biyectiva

- Si f y g son biyectivas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$