MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 3: Conjuntos I

02 de Abril de 2019

- $x \in A$ se lee *"x pertenece a A"*.
- $A \subseteq B$ se lee *"A es subconjunto de B"*.
- El cjto universo se simboliza por lo general con $\mathcal{U}$ y el vacio con $\emptyset$.
- $x \in \emptyset$ siempre será falso.
- Escribir un conjunto que sea solo de los elementos que cumplen una proposición *p(x)*.
  $A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\}$.
- $A \subseteq B \iff (\forall x \in \mathcal{U})[x \in A \Rightarrow x \in B]$.
- $A = B \iff (\forall x \in \mathcal{U})[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$.
  O en terminos de subconjuntos:
  $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Prop:
  1. $A = A$
  2. $A = B \iff B = A$
  3. $A = B \wedge B = C \iff A = C$
  4. $A \subseteq A$
  5. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- Sean A y B dos subconjuntos de $\mathcal{U}$. Se definen las siguientes operaciones entre conjuntos:
  1. $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \vee x \in B\}$
  2. $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}$
  3. $A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$
  4. $A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$
  5. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- La unión, y intersección cumplen conmutatividad, asociatividad, distributividad, De Morgan.
- Se define el conjunto potencia o partes de un conjunto como: $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X : X \subseteq A\}$
- Se define el producto cartesiano entre A y B como: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

P1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
d) $x \in \{x\}$
e) $x \in \{\{x\}\}$
f) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
g) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
h) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$
i) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

P2. *a)* $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = A^c \cup B$

b) si A, B no son vacios, entonces $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cup B^c = B^c$

c) demostrar que $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}$ se tiene la siguiente propiedad:

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \implies X = Y$$

donde $A \subseteq \mathcal{U}$ es un conjunto fijo.

P3. *a)* Sean A, B, C, D conjuntos tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. Demuestre que:

$$(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$$

b) Sean X, C, D conjuntos. Pruebe que:

$$X \subseteq C \wedge X \subseteq D \iff X \subseteq (C \cap D)$$

P4. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos de un mismo universo $\mathcal{U}$

P5. Sean $A, B, C \in P(\mathcal{U})$.

a) Demuestre la *propiedad cancelativa* de la diferencia simetrica, es decir:

$$A \triangle B = A \triangle C \implies B = C$$

b) Use lo anterior para demostrar que:

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \iff A = \emptyset$$

c) Use la propiedad cancelativa para demostrar la pregunta $P2.c$)