

P0 No se puede en ningún caso. En estos momentos no podemos probarlo, necesitamos algo que se llama "teorema del isomorfismo" para Lógica.

La consecuencia de estas cosas es que debemos establecer por separado estas operaciones, esto es necesario, por ejemplo, para los computadores.

P1 notemos que $p * q \Leftrightarrow F$ si hay al menos un V

a)

p	$p * p$	$\neg p$
V	F	F
F	V	V

Como $p * p$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg p$ se concluye que $p * p \Leftrightarrow \neg p$

ahora probaremos que $p \vee q \Leftrightarrow \neg(p * q)$ con tablas de verdad

p	q	$p \vee q$	$p * q$	$\neg(p * q)$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F

Son iguales

$$\Rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \neg(p * q)$$

$$b) 1) [p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\neg p \vee q] \quad \text{\textit{caract del implica}}$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q) \quad \text{\textit{parte a)}$$

$$2) p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q)) \quad \text{\textit{doble negación}}$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \quad \text{\textit{Morgan}}$$

$$\Leftrightarrow \neg[\neg(\neg p \wedge \neg q)] \quad \text{\textit{parte (a)}}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad \text{\textit{doble negación}}$$

P2 debemos descubrir p, q, r, s, t si sabemos que la proposición es falsa

$$\{[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(r \Rightarrow s)} \wedge \bar{t}] \Rightarrow [s \vee (q \Rightarrow s)]\} \Leftrightarrow F$$

Como se tiene $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow F$ se tiene que

$$A \Leftrightarrow V \quad \wedge \quad B \Leftrightarrow F \quad \text{\textit{Por que "P"}}$$

Luego, aplicando esto se tiene que

$$[p \Leftrightarrow q \wedge \overline{(r \Rightarrow s)} \wedge \bar{t}] \Leftrightarrow V \quad \text{\textit{⊛}}$$

$$\wedge [s \vee [q \Rightarrow s] \Leftrightarrow F] \quad \text{\textit{ⓑ}}$$

desde $\text{\textit{⊛}}$, vemos que aplicando la tabla de verdad del "y lógico"

$$\text{\textit{⊛}} \Rightarrow [p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow V \quad \wedge \quad \overline{(r \Rightarrow s)} \Leftrightarrow V$$

$$\wedge \quad \bar{t} \Leftrightarrow V$$

$$\text{y de } (P) \Rightarrow S \Leftrightarrow F \wedge (q \Rightarrow S) \Leftrightarrow F$$

↳ De aquí sabemos que $S \Leftrightarrow F$,

$$\text{reemplazando } [q \Rightarrow F] \Leftrightarrow F$$

$$\Rightarrow [q \Leftrightarrow V]$$

Seguimos ... en (1)

$$[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow V \Rightarrow [p \Leftrightarrow V]$$

en (2) ...

$$[(r \Rightarrow s) \Leftrightarrow V] \Rightarrow [r \Rightarrow s] \Leftrightarrow F$$

$$\Rightarrow [r \Leftrightarrow V]$$

y por último como $t \Leftrightarrow V$

$$\text{se tiene que } [t \Leftrightarrow F]$$

De esta forma

$$p \Leftrightarrow V, \quad q \Leftrightarrow V, \quad r \Leftrightarrow V$$

$$s \Leftrightarrow F, \quad t \Leftrightarrow F$$

P3 a) método simbólico

$$1) \text{ pda } p \vee q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow V$$

En efecto,

$$p \vee q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee \overline{(p \wedge q)} \quad / \text{Morgan}$$

$$\Leftrightarrow V$$

Donde al final ocupamos que $A \vee \bar{A} \Leftrightarrow V$

$$2) \text{ pda } \underbrace{(\bar{p} \wedge \bar{q})}_A \Leftrightarrow \underbrace{[\overline{p \vee (\bar{p} \wedge q)}]}_B$$

Debemos probar que $A \Leftrightarrow B$, esto se hace partiendo de un lado y llegando al otro. En general se parte desde el lado más grande o con más información.

$$\text{Entonces } \overline{[p \vee (\bar{p} \wedge q)]} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)} \quad / \text{Morgan}$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \wedge (\bar{\bar{p}} \vee \bar{q}) \quad / \text{Morgan}$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \wedge (p \vee \bar{q}) \quad / \text{Doble negación}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad / \text{Distr}$$

$$\Leftrightarrow F \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad / \bar{p} \wedge p = F$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad / F \vee \text{ algo} \Leftrightarrow \text{ algo}$$

$$b) 1) (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$$

La idea de este método es asumir la hipótesis y con esa info concluir la tesis

En efecto, supongamos que $[p \Rightarrow r] \Leftrightarrow V$, si fuera falso, el caso es trivialmente verdadero, debemos probar que $[p \wedge q \Rightarrow r] \Leftrightarrow V$, manipulamos un poco la tesis

$$\begin{aligned}
 [p \wedge q \Rightarrow r] &\Leftrightarrow (\overline{p \wedge q} \vee r) && / \text{Caract Implica} \\
 &\Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \vee r && / \text{Morgan} \\
 &\Leftrightarrow \overline{q} \vee [\overline{p} \vee r] && / \text{Commutatividad y Asocio} \\
 &\Leftrightarrow \overline{q} \vee [p \Rightarrow r] && / \text{Caract Implica} \\
 &\Leftrightarrow \overline{q} \vee V && / \text{por hipótesis } [p \Rightarrow r] \Leftrightarrow V \\
 &\Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

Luego, la proposición es verdadera

En resumen, tenemos $A \Rightarrow B$, asumimos que $A \Leftrightarrow V$ y con esta info podemos probar que $B \Leftrightarrow V$.

Siempre hay que decir el caso trivial

$$2) \text{ pda } \underbrace{[(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{r} \wedge \bar{p})]}_A \Leftrightarrow \underbrace{(p \Rightarrow q)}_B$$

Lo que haremos es asumir que $B \Leftrightarrow V$ y con esta info, probar que $A \Leftrightarrow V$, también hay que asumir que $B \Leftrightarrow F$ y con esta info probar que $A \Leftrightarrow F$ (Notar que A y B pueden intercambiar los roles).

Caso 1: Si $p \Rightarrow q \Leftrightarrow F$

$$\Rightarrow p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow F$$

Luego, reemplazando en $[(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{r} \wedge \bar{p})]$

$$\Leftrightarrow [(F \vee F) \vee (\bar{r} \wedge F)]$$

$$\Leftrightarrow (F \vee F)$$

$$\Leftrightarrow F$$

Luego, ambos lados de la equivalencia son falsos, es decir, $[F \Leftrightarrow F] \Leftrightarrow V$

Caso 2: Si $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow V \Leftrightarrow [\bar{p} \vee q]$

$$\Rightarrow \text{reemplazando } [(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{r} \wedge \bar{p})]$$

$$\Leftrightarrow [V \vee (\bar{r} \wedge \bar{p})]$$

$$\Leftrightarrow V$$

Luego, en cualquier caso, la prop es verdadera

$$(P3) \text{ c1) } p \text{ o } q: [p \Rightarrow q] \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r}) \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]$$

Este método consiste en suponer la proposición completa como falsa y con esta información encontrar una contradicción o algún error que jamás puede pasar. Por ejemplo una contradicción puede ser que $p \Leftrightarrow V$ y al mismo tiempo $p \Leftrightarrow F$.

En efecto, supongamos que la proposición es falsa, entonces

$$[p \Rightarrow q] \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r}) \Leftrightarrow V$$

$$\wedge [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)] \Leftrightarrow F \quad \text{ojo!}$$

De lo último, $\bar{p} \Leftrightarrow F$, $\bar{r} \Leftrightarrow F$, $q \wedge s \Leftrightarrow F$

Del mismo modo...

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V \wedge \bar{s} \Rightarrow \bar{r} \Leftrightarrow V,$$

Como $p \Rightarrow q \Leftrightarrow V$, entonces $q \Leftrightarrow V$ ya que $\bar{p} \Leftrightarrow F$ o bien $p \Leftrightarrow V$.

Además, como $\bar{s} \Rightarrow \bar{r} \Leftrightarrow V$ y $\bar{r} \Leftrightarrow F$

se tiene que $\bar{s} \Leftrightarrow F$ o bien $s \Leftrightarrow V$

Luego $q \Leftrightarrow V$ y $s \Leftrightarrow V$

$\Rightarrow q \wedge s \Leftrightarrow V$ pero ¿cómo?

Si $q \wedge s \Leftrightarrow F$, Contradicción $\Rightarrow \times$

¿Que paso? Asumimos que la proposición es falsa y eso nos lleva a un error. Nuestro error fue asumir que era falsa.

∴ la proposición es verdadera

$$\boxed{P4} \quad \text{pdg } [\exists y] (p(y) \Rightarrow \forall x p(x))$$

hay que encontrar un "y" tal que $p(y) \Rightarrow \forall x p(x)$.

Si $\exists y$ tal que $p(y) \Leftrightarrow F$ (resumiendo $\exists y \neg p(y)$)

es directo ya que $F \Rightarrow \forall x p(x) \Leftrightarrow V$.

En caso contrario si $\forall x p(x) \Leftrightarrow V$, se tiene

que $p(y) \Rightarrow V$, y como $\forall x p(x) \Leftrightarrow V$

en particular $p(y) \Leftrightarrow V$ entonces lo anterior es verdadero.

En cualquier caso la proposición es V

$$\boxed{P5} \quad \exists x [x \cdot x = 2]$$

Lo anterior es verdadero en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$.

Si solo tuvieramos la relación " $<$ "
no podríamos separar $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ en la lógica
¿Por qué? → leer Ehrenfeucht - Fraïssé games