MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 2: Inducción

26 de Marzo de 2019

- Consideremos una proposición:

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)p(n)$$

Entonces esto es equivalente a:

$$p(n_0) \wedge [(\forall n \geq n_0)p(n) \implies p(n+1)]$$

y también es equivalente a:

$$p(n_0) \wedge [(\forall n \geq n_0)(p(n_0) \wedge \cdots \wedge p(n-1)) \implies p(n)]$$

P1. [Demostraciones con Cuantificadores]

a) Demuestre que $\exists m \in \mathbb{Z},\ \dfrac{m-7}{2m+4} = 5$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, [n \text{ es par} \iff n^2 \text{ es par}]$

c) Demuestre que es falso que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 \geq y^2 \iff x \geq y$

P2. [Divisibilidad] Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$ que

a) $n^3 + 5n$ es multiplo de 6

b) $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$

Obs: La expresión $a \mid b$ se lee "a divide a b"

P3. [Pensamiento Recursivo]
Sea T_n una sucesión, definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} T_n &= 5T_{n-1} - 4T_{n-2},\ \forall n \geq 3 \\ T_1 &= 3 \\ T_2 &= 15 \end{aligned}$$

a) Calcule T_3, T_4 y T_5

b) Conjeture un valor no recursivo para T_n y demuestre usando inducción que su conjetura es correcta.

P4. [Desigualdades]

a) Determine el menor $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual es válida la desigualdad $3n + 2 < 2^n$ y demuestre que la desigualdad es cierta $\forall n \geq n_0$ usando inducción.

b) Demuestre por inducción que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall n \in \mathbb{N}, x > -1,\ x \text{ fijo}$$

P5. [Suma grande]
Demuestre que $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo n.