MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 1: Lógica y Cuantificadores

19 de Marzo de 2019

- Una proposición lógica es un enunciado que toma un valor de verdad V o F.
- Los conectivos lógicos son operaciones entre proposiciones y permiten construir nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya conocidas.
- Las tablas de verdad de las proposiciones básicas son:

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Los conectivos $\vee$ y $\wedge$ son asociativos, conmutativos y distribuyen uno con respecto a otro.
- Otras proposiciones conocidas son:
  1. $(p \implies q) \equiv (\overline{p} \vee q)$
  2. $(p \iff q) \equiv [(p \implies q) \wedge (q \implies p)]$
  3. $(p \veebar q) \equiv \overline{(p \iff q)}$
- Se dirá que una proposición es una tautología si su valor de verdad es siempre V, en cambio si es siempre F diremos que es una contradicción.
- Algunas tautologías útiles son:
  1. $\overline{(p \vee q)} \iff (\overline{p} \wedge \overline{q})$
  2. $\overline{(p \wedge q)} \iff (\overline{p} \vee \overline{q})$
  3. $(p \implies q) \iff (\overline{q} \implies \overline{p})$
  4. $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$
- Una función proposicional es una expresión $p(x)$, tal que al reemplazar x en la función esta se transforma en una proposición $p(x)$.
- Un cuantificador nos proporciona información sobre los objetos a evaluar en la función proposicional. Los clásicos cuantificadores son :
  1. Cuantificador Universal ($\forall$), se lee "para todo".
  2. Cuantificador Existencial ($\exists$), se lee "existe".
  3. Cuantificador de Existencia y Unicidad ($\exists!$), se lee "existe un único".
- Las negaciones clásicas con cuantificadores son:
  1. $\overline{[\forall x, p(x)]} \iff [\exists x, \overline{p(x)}]$
  2. $\overline{[\exists x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}]$
  3. $\overline{[\exists! x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}] \vee [\exists x, y, p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y]$
- La proposición $x \in A$ se lee x pertenece al conjunto A.

P0. [Introducción]
¿Es posible definir el operador suma $+$ en $\mathbb{R}$ solo teniendo el operador multiplicación $\cdot$? ¿Y al revés? ¿Qué consecuencias trae esto?

P1. [Nuevo operador]
Sean p y q proposiciones. Se define la proposición $p * q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

a) Probar que $\sim p \;\Leftrightarrow\; (p * p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p * q)$.

b) Expresar las proposiciones $(p \Rightarrow q)$ y $(q \wedge p)$ usando sólo $*$ y $\sim$.

P2. [A jugar con los conectores]
Determine los valores de verdad de las proposiciones p, q, r, s y t, si se sabe que la proposición:

$$[(p \Longleftrightarrow q) \wedge \overline{(r \Rightarrow s)} \wedge \overline{t}] \Longrightarrow [s \vee (q \Rightarrow s)] \text{ es falsa}$$

P3. [Métodos de Demostración]
Sean p, q, r, s proposiciones lógicas.

a) Demuestre mediante el método algebraico o simbólico que:

1) $p \vee q \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$.
2) $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \iff \overline{(p \vee (\overline{p} \wedge q))}$.

b) Demuestre mediante el método exploratorio que:

1) $(p \implies r) \implies ((p \wedge q) \implies r)$.
2) $[(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{r} \wedge \overline{p})] \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q)$

c) Demuestre por contradicción:

1) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Longrightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$

P4. [¿Todas las proposiciones?]
Demuestre que $[\exists y][p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]$, donde $p(\cdot)$ es una función proposicional.

P5. [Separación de estructuras]
Escriba una proposición que sea cierta en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$. ¿Es posible hacer lo mismo si no tuviéramos la suma ni la multiplicación, por ejemplo si solo tuviéramos la relación "*menor que*" ?