MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Natalia Ruíz
Auxiliares: Rodrigo Maulen - Ricardo Arancibia
Cristobal Valenzuela - .
Fecha: 12 de Junio de 2019.

Auxiliar extra C3

Resumen

- **Volúmenes**
  - Sea A(x) la sección transversal de una región S, el volumen de S, vendrá dado por

$$V(S) = \int A(x)dx$$

    Sea la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$
  - Volúmen de rotación de R en eje OX: $\pi \int_a^b (f(x))^2$
  - Volúmen de rotación de R en eje OY: $2\pi \int_a^b xf(x)$
- **Curvas**
  - Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. La función longitud de arco de Γ está dada por

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\| d\tau$$

  - Al invertir esa función y obtener $t(s)$, $\vec{\sigma}(s) := \vec{r}(t(s))$ es llamada la parametrización natural, cumple $\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) \right\| = 1$
  - Se define el vector velocidad, rapidez, vector tangente y vector normal como

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, v(t) = \|\vec{v}(t)\|, T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}, N(t) = \frac{dT}{dt}(t) / \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\|$$

  - Se define la curvatura, el vector binormal y la torsión como

$$\kappa(t) = \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| / v(t), B = T \times N, \tau(t) = -N(t) \cdot \left(\frac{dB}{dt}(t)/v(t) \right)$$

- **Centros de masas**
  - Centro de masa de regiones: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con densidad ρ constante

$$M = \int_\Omega \rho dA \quad (x_i)_{CM} = \frac{\int_\Omega x_i \rho dA}{M}$$

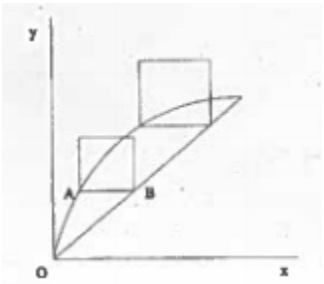
  - Centro de masa de curvas: Sea $\vec{r}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una parametrización de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ de densidad lineal ρ

$$M = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \quad (x_i)_{CM} = \frac{\int_a^b x_i \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt}{M}$$

Preguntas

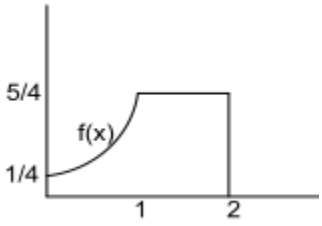
P1 a) Encuentre el volumen de una pirámide de base cuadrada, de altura H y de ancho basal a.

b) Considere la región del primer cuadrante encerrada por la parábola $y^2 = 4ax$, $a > 0$ y la recta $y = x$. Encuentre el volumen del sólido que se genera al levantar cuadrados de lado AB en cada posición de este segmento dentro de la región indicada.



P2 a) Se modela una jabonera como el sólido de revolución en torno al eje OY de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^m + 1/4$, $y = 5/4$ y $x = 2$. Se solicita que el volumen de la jabonera debe ser de $\frac{22}{5}\pi$ ¿Qué m debería elegir para lograr esto?

b) Con el m previamente encontrado, le solicitan que genere un martillo(?, este viene dado como el sólido de revolución de la región previa en torno al eje OX ¿Y si le pidieran revolucionar en torno a y=-1?



P3 a) Considere una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, considere el plano Ax+By+Cz=D, muestre que si la curva esta contenida en el plano, entonces la torsión es nula.

b) Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + z^2 = 4 + y^2$$

tomando en cuenta sólo la parte de la curva con $z > 0$.

1) Encuentre una parametrización de Γ.
2) Calcule el centro de masa suponiendo densidad lineal de masa dada por

$$\rho(x, y, z) = xy$$

c) Calcule el centro de masa de la región formada por $y + x^\alpha = 1$ $\alpha > 0$ en el primer cuadrante .