MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Pauta Auxiliar 10: Límites y Sucesiones

Jueves 1 de Mayo

P1. Pruebe los siguientes límites por definición

a) $\dfrac{n+2019}{n^5} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, $\left|\dfrac{n+2019}{n^5}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{n^4}\right| + \left|\dfrac{2019}{n^5}\right| = \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{2019}{n^5}$

Por arquimediana $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$, tomando $r = \sqrt[4]{\dfrac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{n^4} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por arquimediana $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_2$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$, tomando $r = \sqrt[5]{\dfrac{\varepsilon}{4038}} \Rightarrow \dfrac{2019}{n^5} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ se cumple $\forall n \geqslant n_0$ se cumple que $\left|\dfrac{n+2019}{n^5}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{2019}{n^5} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

b) $\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n-3}} - 1 = 1$

Sea $\epsilon > 0$,

$$\left|\sqrt{\frac{4n+1}{2n-3}} - 1 - 1\right| = \left|\left(\sqrt{\frac{4n+1}{2n-3}} - 1 - 1\right)\frac{\left(\sqrt{\frac{4n+1}{2n-3}} - 1 + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{4n+1}{2n-3}} - 1 + 1\right)}\right| =$$

$$\left|\frac{\left(\frac{4n+1}{2n-3} - 2\right)}{\left(\sqrt{\frac{4n+1}{2n-3}} - 1 + 1\right)}\right| = \frac{\frac{7}{2n-3}}{\left(\sqrt{\frac{4n+1}{2n-3}} - 1 + 1\right)} \leqslant \frac{7}{2n-3} \leqslant \frac{4}{n - \frac{3}{2}} \leqslant \frac{4}{n-2}$$

Por arquimediana $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$, tomando $r = \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{n-4} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}, \forall n \geqslant n_1 + 4$. Entonces tomando $n_0 = n_1 + 4$ se cumple $\forall n \geqslant n_0$ se cumple que $\left|\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n-3}} - 1 - 1\right| \leqslant \dfrac{4}{n-2} \leqslant 4\dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

c) $\cos(n!\pi) = 1$

No temos que sea $\varepsilon > 0$, $n_0 = 2$, $\forall n \geqslant n_0$ $\cos(n!\pi) - 1 = 0 \Rightarrow |\cos(n!\pi) - 1| = 0 \leqslant \varepsilon$

d) $\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, $\left|\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}\right| \leqslant \left|\dfrac{n}{n^2+1}\right| \leqslant \left|\dfrac{n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n}$

Por arquimediana $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$ se cumple que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$, tomando $r = \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Entonces tomando $n_0 = n_1$ se cumple $\forall n \geqslant n_0$ se cumple que $\left|\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$

P2. Calcule los siguientes límites:

a) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}$

Notemos que:

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}$$

Por lo tanto cuando en el límite:

$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2} \to \dfrac{1}{2}$

Notar que $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \to 1$ y $\sqrt{1+\dfrac{2}{n}} \to 1$ la demostración se puede hacer muy similar a $p1)b$

b) $\left(1+\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n$

Este es un caso de $(1+h_n)^n$, con $nh_n \to 0$, por lo tanto $\left(1+\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n \to 1$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \iff \frac{n}{\sqrt{n^2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

Por lo tanto:

$1 \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$, por teorema del sandwich, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \to 1$$

d) $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

$$\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{2\frac{2}{3}^n+3}{\frac{2}{3}^n+1} \to \frac{0+3}{0+1} = 3$$

e) $\sqrt[n]{n+\sin(n!)}$

$\sqrt[n]{n-1} \leqslant \sqrt[n]{n+\sin(n!)} \leqslant \sqrt[n]{n+1}$, notemos que ambos extremos tienden a 1, por lo tanto por teorema del sandwich $\sqrt[n]{n+\sin(n!)} \to 1$

f) $\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^n$

Notando que $\dfrac{2n+1}{3n-1} \to \dfrac{2}{3}$, entonces se tiene que $\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^n \to 0$

g) $\dfrac{\ln(2^n+3^n)}{n}$

Como el logaritmo es creciente:
$\ln(3) = \dfrac{\ln(3^n)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(2^n+3^n)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(23^n)}{n} = \dfrac{\ln(2)}{n} + \ln(3)$
Por sandwich se tiene que $\dfrac{\ln(2^n+3^n)}{n} \to \ln(3)$

h) $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)^n$

$0 \leqslant \left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$
Notemos que $\left(\dfrac{2}{n}\right)^n \to 0$, pues $\dfrac{2}{n} \to 0$
Por sandwich: $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)^n \to 0$

P3. Considere las sucesiones (X_n) e (Y_n) definidas por:

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad\qquad Y_n = X_n + \frac{1}{n!n}$$

a) Pruebe que (X_n) e (Y_n) son sucesiones monótonas.

$X_{n+1} - X_n = \dfrac{1}{(n+1)! > 0} \Rightarrow X_{n+1} > X_n$
$Y_{n+1} - Y_n = \dfrac{1}{(n+1)!(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!n}$
$Y_{n+1} - Y_n = \dfrac{n+n(n+1)-(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} = -\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \Rightarrow Y_{n+1} < Y_n$

b) Usando lo anterior pruebe que ambas sucesiones convergen, que lo hacen al mismo límite, que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n < l < Y_n$ y que $2{,}5 < l < 2{,}75$.

Como son monótonas se tiene que:
$\forall n,\ 2 = X_1 < X_n < Y_n < Y_1 = 3$
Como ambas son sucesiones monótonas acotadas, se concluye que convergen.
Notemos que $X_n \to l \Rightarrow Y_n = X_n + \dfrac{1}{n!n} \to l + 0 = l$
Por lo tanto lo hacen al mismo.
Por monotonía, se tiene que:
$\forall n\ X_1 < X_2 < X_n < l < Y_n < Y_2 < Y_1$
Evaluando en $n = 2$, $2{,}5 = X_2 < l < Y_2 = 2{,}75$

P4. Considere la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$P_0 > 0, P_{n+1} = \frac{bP_n}{a + P_n}$$

donde a, b son constantes positivas.
(i) Demuestre que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, los únicos valores posibles de su límite son 0 y $b - a$.

Si P_n converge a P, se tiene que:
$P = \dfrac{bP}{a+P} \iff P((b-a)-P) = 0 \iff P = 0 \vee P = b - a$

(ii) Pruebe que si $a > b$, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0.

Primero notar que $P_n > 0$, pues $P_0 > 0$ y si $P_n > 0 \Rightarrow P_{n+1} = \dfrac{bP_n}{a+P_n} > 0$.
También $P_{n+1} \leqslant \dfrac{b}{a}P_n < P_n$, pues $\dfrac{b}{a} < 1$.
Por lo tanto es decreciente y acotada inferior por 0 (de esto se deduce que converge, pero no se sabe a que) y como $b - a < 0$, por la parte i) se concluye que converge a 0

(iii) Suponga ahora que $a < b$ y $0 < P_0 < b - a$.
- Pruebe que $0 < P_n < b - a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.
- Determine $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Vamos a probar por inducción que $P_n < b - a$ (que $P_n > 0$, se tiene similar que en ii)), se tiene el caso base, supongamos que se tiene para un n
$P_{n+1} = \dfrac{bP_n}{a+P_n} < b - a \iff bP_n < ba - a^2 + bP_n - aP_n \iff 0 < a(b - a - P_n) \iff P_n < b - a.$
$P_{n+1} > P_n \iff \dfrac{bP_n}{a+P_n} > P_n \iff \dfrac{b}{a+P_n} > 1 \iff b > a + P_n \iff b - a > P_n \iff V$
Por lo que es creciente.
Como es acotado superiormente por $b - a$, por lo que es convergente. Como es creciente y mayor que 0. Converge a $b - a$