

**MA1001-9 Introducción al Cálculo****Profesor:** Amitai Linker**Auxiliares:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 7: Trigonometría**

25 de Abril del 2019

**P1.** Pruebe las siguientes identidades:

$$\begin{array}{ll}
 a) \sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & f) \cos(2x) = \frac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2} \\
 b) \sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) & g) \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\
 c) \cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & h) \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\
 d) \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) & i) (\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \\
 e) \sin(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} & j) \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sec^2 x - \sec x \tan x}{\cos^2 x}
 \end{array}$$

**P2.** Usando teoremas del seno y coseno, resuelva los siguientes problemas:

- a) Una persona  $P$  ubicada en un acantilado a una altura  $h$  sobre el nivel del mar, ve un globo estático  $G$  con un ángulo de elevación  $\alpha$  y su sombra  $S$  en el agua con un ángulo de depresión  $\beta$ . Si en el momento de la observación se sabe que la inclinación de los rayos solares es  $\gamma$ , se pide calcular la altura  $H$  del globo sobre el mar en función de  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $h$ .
- b) Muestre que el triángulo  $\Delta_{ABC}$  donde  $\frac{a+c}{b} = \cot\left(\frac{B}{2}\right)$ , cumple que  $A$  o  $C$  son ángulos rectos.

**P3.** Resuelva las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 a) (\cos(x))^3 + (\sin(x))^3 + 1 - \frac{1}{2} \sin(2x) = 0 & c) \sin(2x) \cot(x) - \sin(x)^2 = \frac{1}{2} \\
 b) \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)} = 1 + \sin(2x) & d) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan(x)^2}
 \end{array}$$

## Propuestos

**P1.** Considere el triángulo  $\Delta_{ABC}$  usando el teorema del coseno, pruebe que  $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ , donde  $m_a$  es el largo de la mediana correspondiente al lado  $a$

**P2.** Sea  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  se definen  $T_n$  y  $S_n$  por:

$$S_n = \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) + \dots + \sin(n\alpha)$$

$$T_n = \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(n\alpha)$$

Defina  $U_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)$ . Demuestre que  $U_n = S_n \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + T_n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

**P3.** Demuestre que  $\tan^4 u = \frac{4 \tan u - 4 \tan^3 u}{1 - 6 \tan^3 u + \tan 4x}$

### Recuerdos y Consejos

**Descripción general de funciones seno, coseno y tangente.**

a)  $\sin(x)$ : Dominio:  $\mathbb{R}$ , Recorrido:  $[-1, 1]$ , impar, periódica de periodo  $2\pi$ , ceros =  $\sin^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Positiva entre  $0$  y  $\pi$ , creciente entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$ , decreciente entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ .

b)  $\cos(x)$ : Dominio:  $\mathbb{R}$ , Recorrido:  $[-1, 1]$ , par, de periodo  $2\pi$ , ceros =  $\cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Positiva entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$  y negativa entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ , decreciente entre  $0$  y  $\pi$ .

c)  $\tan(x)$ : Dominio:  $\mathbb{R}$  excluyendo los ceros de  $\cos(x)$ , Recorrido:  $\mathbb{R}$ , impar, periódica de periodo  $\pi$ , ceros son los del  $\sin(x)$ , positiva entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$  y negativa entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$  y estrictamente creciente en  $\left(-\frac{\pi}{2} + K\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ .

**Funciones recíprocas**

1.  $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

2.  $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

3.  $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

**Identidad suma de ángulos**

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

Considere el  $\Delta_{ABC}$ , con lados  $a, b$  y  $c$  opuestos a los ángulos  $A, B$  y  $C$ .

**Teorema del seno**

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

**Teorema del coseno**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

$x^\circ$ (grados)	$x$ (radianes)	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0^\circ$	$0$	$0$	$1$	$0$
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$1$	$0$	-
$180^\circ$	$\pi$	$0$	$-1$	$0$
$270^\circ$	$\frac{3\pi}{2}$	$-1$	$0$	-