MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 1: Axiomas

15 de Marzo del 2019

P1. Usando los axiomas de cuerpo de los reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades:

a) Unicidad del elemento multiplicativo

b) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

c) $(ab) \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, con $a, b \neq 0$

P2. Usando sólo los axiomas de los números reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos:
i) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a + b = 1$, entonces el inverso multiplicativo de ab es $a^{-1} + b^{-1}$.

ii) Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $b, c \neq 0$, entonces:

$$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = 1$$

P3. Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):
(A1): $2 \in C$
(A2): Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$
(A3): Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$
(A4): $3 \notin C$

Demuestre las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o los recién mencionados.

(a) $9 \in C$
(b) $1 \notin C$
(c) Si $x \in C$, entonces $2x \in C$
(d) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$
(e) Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$

P4. Usando propiedades fundamentales de los números reales, demuestre que para todo x, y, w y $z \in \mathbb{R}$, tal que $w \neq 0$ y $z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \lambda w, y = \lambda z$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$, luego vea que esto ultimo implica que $xz = yw$.
Finalmente de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

Recuerdos y Consejos

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$

Axioma de Conmutatividad

$$x + y = y + x \qquad\qquad xy = yx$$

Axioma de Asociatividad

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad\qquad (xy)z = x(yz)$$

Axioma de Asociatividad

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad\qquad (xy)z = x(yz)$$

Axioma de Distributividad

$$x(y + z) = xy + xz \qquad\qquad (x + y)z = xz + yz$$

Axioma de Existencia de Elemento Neutro

$$\exists e_1 \in \mathbb{R}, x + e_1 = x \qquad\qquad \exists e_2 \in \mathbb{R} - \{e_1\}, \quad xe_2 = x$$

Axioma de Existencia de Inverso

$$\exists(-x) \in \mathbb{R}, x + (-x) = e_1 \qquad\qquad \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R} - \{e_1\}, \quad x(x^{-1}) = e_2$$

Releer las demostraciones de la semana, en especial las de propiedades como por ejemplo la absorción del 0 y unicidad de elementos inversos.

Hacer los ejercicios de la guía de problemas semana 1, recuerden que cualquier duda puede consultar las soluciones en la nuble mechona, en la seccion de apuntes →pauta apunte, si no entienden parte del desarrollo consultarme :D.