

Resolver la inecuación

$$|2x - |x + 8|| \leq \frac{8}{x - 2}$$

[Respuesta] La solución general es $x \in (2, 4] \cup [6, 5 + \sqrt{17}]$

Antes de mirar las páginas siguientes, intente resolver la inecuación por sus propios medios.

(1) Todas sus posibles soluciones están en $(2, +\infty)$ Justifique.

(Recuerde que un modulo o valor absoluto, no puede ser negativo, es siempre positivo)

(2) Para $x \in (2, +\infty)$, $x + 8$ es mayor que cero, por lo que en $(2, +\infty)$ la inecuación queda como

$$|x - 8| \leq \frac{8}{x - 2}$$

Y basta con analizar los casos $x \in (2, 8]$ y $x \in (8, +\infty)$ (El punto crítico para el modulo es $x = 8$)

(3) Caso 1. En $(2,8]$ la inecuación se puede escribir equivalentemente como:

$$x^2 - 10x + 24 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 6) \geq 0$$

Y las soluciones aquí son $x \in (2,4] \cup [6,8]$

(4) Caso 2. En $(8, +\infty)$ la inecuación se puede escribir equivalentemente como:

$$x^2 - 10x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [5 - \sqrt{17}, 5 + \sqrt{17}]$$

Y las nuevas soluciones aquí son $x \in (8, 5 + \sqrt{17}]$

Juntando todas las soluciones encontradas, la solución general es $x \in (2, 4] \cup [6, 5 + \sqrt{17}]$