

**Control 4, MA12A CALCULO**  
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile**  
**Semestre 2006-1 (2 de Septiembre)**

**P1.**

(a) Considere  $n$  reales distintos entre sí, denotados por  $a_1, \dots, a_n$ . Se definen las funciones  $P$  y  $f$  por

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}.$$

Denotemos por  $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \neq 0\}$ .

a<sub>1</sub>) Probar que  $\forall x \in A$  se cumple  $f'(x) < 0$ .

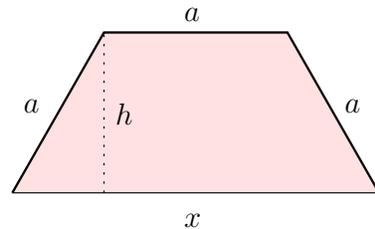
a<sub>2</sub>) Probar que  $\forall x \in A$  se cumple  $\frac{P'(x)}{P(x)} = f(x)$  y que  $P(x) \cdot P''(x) < (P'(x))^2$ .

(b) Considere  $n$  reales **estrictamente positivos**, denotados por  $b_1, \dots, b_n$ . Demuestre que si  $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x \geq n$  entonces necesariamente  $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ .

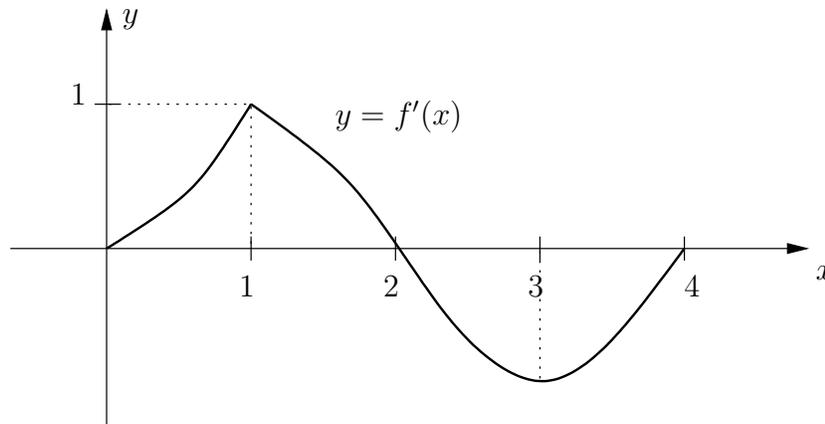
*Indicación: Estudie si  $x = 0$  es o no un punto crítico de  $f(x) = b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x$ .*

**P2.**

a) Se dispone de un alambre de largo  $3a$ , con el cual se desea formar un trapecio isósceles con tres lados iguales a  $a$  y el cuarto de largo  $x$  de modo de maximizar su área. Determine el valor de  $x$  que cumple con esta condición extremal. Justifique su respuesta.



b) Se sabe que **un bosquejo** del gráfico de la derivada de una función  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que  $f(0) = 1$ .



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función  $f$ . Debe indicar precisamente, en que intervalos  $f$  es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza su máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que  $f$  es acotada superiormente por 3.

**P3.**

Considere la función  $f(x) = (x + 1) \ln \left( \left| \frac{x + 1}{x} \right| \right)$ , definida en  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

- a) Encuentre ceros y signos de  $f$ .
- b) Estudie las asíntotas horizontales de  $f$ . Encuentre los límites laterales cuando  $x \rightarrow 0^\pm$  y  $x \rightarrow -1^\pm$  y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
- c) Use el teorema del valor medio en la función auxiliar  $g(x) = \ln|x|$  en el intervalo  $[x, x+1]$  para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

- d) Calcule la primera derivada de  $f$ . Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de  $f$  en  $(-\infty, -1)$  y en  $(0, \infty)$ .
- e) Calcule  $f''(x)$  e indique los intervalos donde  $f$  es cóncava y donde es convexa.
- f) Estudie los límites de  $f'(x)$  cuando  $x \rightarrow -1^+$  y cuando  $x \rightarrow 0^-$ . Usando el signo de la segunda derivada en  $(-1, 0)$  concluya sobre la monotonía de  $f'$  en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde  $f'(x) = 0$ . Bosqueje el gráfico de  $f$ .

**Control 4, MA12A CALCULO**  
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile**  
**Semestre 2006-1 (2 de Septiembre)**

**Solución P1.**

**Parte a<sub>1</sub>:**

Claramente

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-a_1)^2} - \frac{1}{(x-a_2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-a_n)^2}$$

Como cada denominador es un cuadrado perfecto y hay un signo menos delante de él, se cumple que  $f'(x) < 0$ .

**Parte a<sub>2</sub>:**

Derivando:

$$\begin{aligned} P'(x) &= (x-a_2)\cdots(x-a_n) + (x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n) + \cdots + (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) \\ &= \frac{P(x)}{x-a_1} + \frac{P(x)}{x-a_2} + \cdots + \frac{P(x)}{x-a_n} = P(x) \cdot f(x), \end{aligned}$$

de donde resulta  $f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$ .

Derivando una segunda vez

$$f'(x) = \frac{P''(x)P(x) - P'(x)P'(x)}{P(x)^2}$$

Como esta derivada debe ser negativa (ver parte a<sub>1</sub>), se concluye la desigualdad pedida.

**Parte b:**

Consideremos la función  $f(x) = b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x$ . Claramente  $f(0) = n$  y por lo tanto la desigualdad dada en el enunciado, establece que

$$f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que  $x = 0$  es un punto crítico de  $f$ , es decir  $f'(0) = 0$ .

Derivando:

$$f'(x) = b_1^x \ln(b_1) + b_2^x \ln(b_2) + \cdots + b_n^x \ln(b_n).$$

En cero se tiene que

$$f'(0) = \ln(b_1) + \ln(b_2) + \cdots + \ln(b_n) = \ln(b_1 b_2 \cdots b_n).$$

Como la derivada debe ser nula, entonces

$$b_1 b_2 \cdots b_n = 1.$$

## Solución P2.

### Parte a:

Usando la variable auxiliar  $h$  se tiene que el área del trapecio es:

$$A = \frac{1}{2}(a+x)h.$$

Pero por pitágoras

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2,$$

de donde se despeja

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2},$$

donde  $x \in [0, 3a]$ .

Reemplazando se obtiene que:

$$A(x) = \frac{1}{4}(a+x)\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}.$$

Esta función es derivable en  $(0, 3a)$ . Además  $A(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  (área de un triángulo equilátero de lado  $a$ ) y  $A(3a) = 0$ .

Derivando:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{4}\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2} + \frac{1}{4}(a+x)\frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}} \{2ax - x^2 + 3a^2 + (a+x)(a-x)\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}} \{ax - x^2 + 2a^2\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}} \{(a+x)(2a-x)\} \end{aligned}$$

Con esto, el signo de  $A'$  depende sólo del factor  $2a-x$ , el cual vale cero para  $x=2a$ , (punto crítico) es positivo para  $x < 2a$  (función  $A(x)$  creciente) y negativo para  $x > 2a$  (función  $A(x)$  decreciente).

Conclusión: el valor de  $x$  que maximiza el área del trapecio es  $x=2a$ .

### Parte b:

Del gráfico de  $f'$  se concluye la siguiente información:

Intervalo	signo de $f'$	Conclusión	crecimiento de $f'$	Conclusión
(0,1)	$f'(x) > 0$	$f$ creciente	$f'$ creciente	$f$ convexa
(1,2)	$f'(x) > 0$	$f$ creciente	$f'$ decreciente	$f$ concava
(2,3)	$f'(x) < 0$	$f$ decreciente	$f'$ decreciente	$f$ concava
(3,4)	$f'(x) < 0$	$f$ decreciente	$f'$ creciente	$f$ convexa

Por lo tanto  $x=1$  es punto inflexión,  $x=2$  es punto de máximo global,  $x=3$  es punto de inflexión. Los extremos  $x=0$  y  $x=4$  son mínimos locales. No se puede saber cual de ellos es el mínimo global. Usando el teorema del valor medio se tiene que:

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x$$

Por lo tanto, en el valor máximo que está en  $x=2$  se obtiene que:

$$f(2) \leq f(0) + 1 \cdot 2 = 3$$

### Solución P3.

#### Parte a:

$f(x) = 0$  si y solamente si el argumento del logaritmo es uno. O sea  $|x + 1| = |x|$ , es decir  $x = -\frac{1}{2}$

El signo de  $f$  depende del signo del logaritmo y el factor  $(x + 1)$ .

El logaritmo es positivo ssi  $|x + 1| > |x|$ , lo que se cumple para  $x > -\frac{1}{2}$

Por lo tanto:  $f(x)$  es positiva en  $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$

y es negativa en  $(-1, -\frac{1}{2})$ .

#### Parte b:

Cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  se tiene que  $\left|\frac{x+1}{x}\right| \rightarrow 1$  por lo tanto el logaritmo tiende a 0 y multiplicado por  $x + 1$  se obtiene una forma de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

La función tiene asíntota horizontal  $y = 1$  hacia  $\pm\infty$ .

Cuando  $x \rightarrow -1$  se tiene que  $x + 1 \rightarrow 0$  y el logaritmo tiende a menos infinito. Por lo tanto es una nueva forma de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x} = 0$$

Por lo tanto la función es reparable en  $-1$  con el valor  $f(-1) = 0$  para hacerla continua en ese punto. cuando  $x \rightarrow 0$  la fracción en el logaritmo tiende a  $+\infty$  luego el logaritmo también. Y como el factor  $(x + 1)$  exterior tiende a 1, la función tiende a  $+\infty$ .

por lo tanto la función tiene una asíntota vertical en  $x = 0$

#### Parte c:

Como  $g(s) = \ln |s|$  es continua en  $[x, x + 1]$  y derivable en  $(x, x + 1)$  se puede aplicar el Teorema del valor medio el cual se escribe

$$\ln |x + 1| - \ln |x| = \frac{1}{\xi}, \quad \xi \in (x, x + 1)$$

ordenando se obtiene la desigualdad pedida, considerando que

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$$

#### Parte d:

Derivando:

$$f'(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) - \frac{1}{x}$$

Usando la desigualdad (c) se tiene que  $f'(x) < 0$  en  $(-\infty, -1)$  y en  $(0, \infty)$  por lo tanto  $f$  en esos intervalos es estrictamente decreciente.

#### Parte e:

Derivando una vez mas:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

Por lo tanto  $f$  es convexa en  $(-1, 0)$  y  $(0, \infty)$  y es cóncava en  $(-\infty, -1)$ .

#### Parte f:

Como

$$f'(x) = \ln |x + 1| - \ln |x| - \frac{1}{x},$$

se concluye que cuando  $x \rightarrow -1^+$  se tiene que  $f'(x) \rightarrow -\infty$ .

Además, cuando  $x \rightarrow 0^-$  se tiene que  $-\ln|x| \rightarrow +\infty$  y  $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ . Por lo tanto  $f'(x) \rightarrow +\infty$ .

Como  $f''(x) > 0$  en este intervalo, entonces  $f'$  es estrictamente creciente.

Juntando elementos, continuidad, crecimiento estricto, parte en  $-\infty$  y termina en  $+\infty$ , se concluye usando el TVI que  $f'$  tiene un cero en  $(-1, 0)$  y es único.