MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 14:Preparación Examen

25 de Junio de 2019

Resumen Clase 0.5

- Función derivable en x_o: Diremos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es derivable en el punto $x_o\in(a,b)$ si existe el límite:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

O equivalentemente:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

- Función derivable: Diremos que una función $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable, si es derivable para todo $x_o\in(a,b)$
- Derivadas conocidas: Algunos resultados típicos son:
  - $(x)'=1$
  - $(x^n)'=nx^{n-1}$
  - $(sin(x))'=cos(x)$
  - $(cos(x))'=-sin(x)$
  - $(ln(x))'=\dfrac{1}{x}$
  - $(e^x)'=e^x$
  - $(cte)'=0$
- Reglas de derivación: Se obtienen a partir de las propiedades de los límites:
  - $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$
  - $(f\cdot g)'(x_o=f'(x_o)g(x_o)+f(x_o)g'(x_o))$
  - $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_o)=\dfrac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o)^2}$
- Regla de la cadena: Sea f diferenciable en x_o y sea g diferenciable en $y=f(x_o)$, entonces $g\circ f$ es diferenciable en x_o, y además:

$$(g\circ f)'(x_o)=g'(f(x_o))\cdot f'(x_o)$$

P1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones utilizando las reglas básicas

a. $f(x)=x^4+3x^2-6$
b. $f(x)=(a+x)\sqrt{a-x}$
c. $f(x)=tan(x)$
d. $f(x)=sen(x)+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x^2}$
e. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-sen(x)}$
f. $f(x)=\dfrac{2x^5+4x}{cos(x)}$
g. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+tan(x)+\dfrac{1}{tan(x)}$
h. $f(x)=\dfrac{x^2ln(x)}{cos(x)}$
i. $f(x)=\dfrac{e^x+sen(x)}{xe^x}$
j. $f(x)=\dfrac{e^xcos(x)}{1-sen(x)}$

P2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones utilizando regla de la cadena

a. $f(x)=e^{3x^2}$
b. $f(x)=(x^2+4x+6)^4$
c. $f(x)=sen^2(x)$
d. $f(x)=\sqrt[3]{3x^3+4x}$

e. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

f. $f(x) = sen(sen(x^2+1))$

g. $f(x) = tan\left(\frac{1}{x}\right)$

h. $f(x) = e^{tan(x^2)+x^2}$

i. $f(x) = ln(x+\sqrt{1+x^2})$

j. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+3x+1}{ln(3x)}}$

P3. Considere las funciones

$$cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$$

a) Derive $cosh(x)$.

b) Derive $sinh(x)$.

c) Use lo anterior para obtener la derivada de $tanh(x)$. (use reglas de derivadas para fracciones)

P4. Calcule las siguientes derivadas por definición:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $h(z) = z^2+2$

c) $g(x) = e^x$

d) $u(x) = ln(x)$

P5. Considere la función y estudie su crecimiento:

$$f(x) = \frac{x}{ln(x^2)}$$

I Hágalo por el método tradicional, el cual supone $x_1 < x_2$ y demostrar que $f(x_2) - f(x_1)$¡0 ó ¿0, lo cual nos habla de su crecimiento. Ojo con la paridad de la función, y además que intervalos debo estudiar.

II Hágalo mediante derivada y su definición, ¿Te la sabes no?

P6. Calcule las siguientes derivadas:

a) $f(x) = \frac{x^2-tan^2(x)}{2x+sec(x)}$

b) $l(x) = sin(x^{cos(x)}) + cos(x^{sin(x)})$

c) $g(x) = (cos(x))^{1+sen(x)}$

d) $h(x) = (\pi^x + x^\pi)(xsin(3x)+2\sqrt{3})$

e) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+e^x}$

f) $g(x) = ln[arcsin(\sqrt{x})^2 + cos(x)]$

g) $h(x) = x^{arctan(1/x)}$

P7. Una partícula se mueve por el eje OX de modo que su posición está dada por la fórmula

$$x(t) = \frac{1}{1+ae^{-kt}}$$

donde a y k son constantes positivas. Determine la velocidad de la partícula en función de t

P8. Estudie el crecimiento de las siguientes funciones *a*) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

P9. Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

a) Determine dominio, recorrido, ceros, signos y paridad de f

b) Encuentre, si existen, asíntotas verticales y horizontales

c) estudie crecimiento

d) Esboce el gráfico de f

e) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la función $f : A \to \mathbb{R}$. ¿Bajo qué condiciones f sería biyectiva?

P10. Derivación implícita Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación, en un punto P, donde su ordenada es nula,$x > 0$

$$ln(\frac{3}{4} + x^2 + y) = sen(xy)$$

P11. Gottfried Leibniz
Sea $g(x) = e^{x^2}$

a) Demuestre que $g'(x) = 2xg(x)$ y úselo para probar que

$$g^{(n+1)}(x) = 2(ng^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x))$$

b) Determinar una fórmula para $g^{(n+1)}(0)$ y calcule el polinomio de Taylor orden 6 , en torno a $x = 0$

P12. Aporte

[R.P5]