Control 4, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (2 de Septiembre)

P1.

(a) Considere n reales distintos entre sí, denotados por $a_1, \ldots, a_n$. Se definen las funciones P y f por

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \\ f(x) &= \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}. \end{aligned}$$

Denotemos por $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \neq 0\}$.

a_1) Probar que $\forall x \in A$ se cumple $f'(x) < 0$.

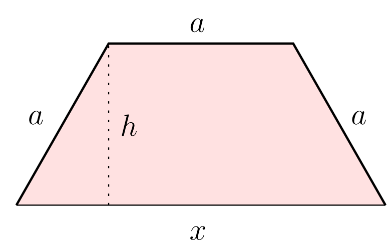
a_2) Probar que $\forall x \in A$ se cumple $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = f(x)$ y que $P(x) \cdot P''(x) < (P'(x))^2$.

(b) Considere n reales **estrictamente positivos**, denotados por $b_1, \ldots, b_n$. Demuestre que si $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x \geq n$ entonces necesariamente $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$.

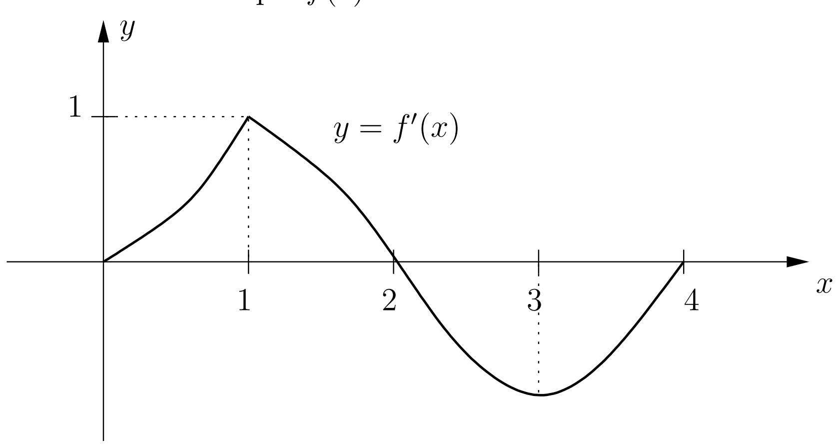
Indicación: Estudie si $x = 0$ es o no un punto crítico de $f(x) = b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x$.

P2.

a) Se dispone de un alambre de largo $3a$, con el cual se desea formar un trapecio isósceles con tres lados iguales a a y el cuarto de largo x de modo de maximizar su área. Determine el valor de x que cumple con esta condición extremal. Justifique su respuesta.



b) Se sabe que **un bosquejo** del gráfico de la derivada de una función $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que $f(0) = 1$.



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función f. Debe indicar precisamente, en que intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza su máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que f es acotada superiormente por 3.

P3.

Considere la función $f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\dfrac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

a) Encuentre ceros y signos de f.
b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los límites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to -1^{\pm}$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
c) Use el teorema del valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln|x|$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \qquad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

d) Calcule la primera derivada de f. Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$.
e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa.
f) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^{+}$ y cuando $x \to 0^{-}$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f.