Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-1 Introducción al Cálculo
16 de Agosto de 2015

Resumen Examen

Dudas - Consultas - Comentarios: `gliberona@dim.uchile.cl`

- Definición (Derivada de una función): Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que f es derivable o diferenciable en $x_0 \in \mathtt{Int}A$ si el límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
existe. En tal caso el valor del límite se llamará derivada de f en x_0 y se denotará $f'(x_0)$. A la función tal que $x \to f'(x)$ se le llamará función derivada de f y se denotará por f'.

- Observaciones
  - Notaciones de la función derivada de $y = f(x)$: f', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\dot{y}$, etc.
  - El dominio de f' y f no necesariamente coinciden. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ posee como dominio a todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x_0 = 0$; por lo que $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  - Si f es derivable en x_0 entonces el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe y vale $f(x_0)$ (esto nos dice que si una función es derivable en x_0, entonces en particular es continua en x_0).

- Funciones Hiperbólicas: A partir de la exponencial se definen las siguientes funciones
  * $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
  * $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
  * $\tanh x = \frac{\sinh}{\cosh}$.

- Derivadas Importantes:

$*f(x) = c = \text{cte} \Rightarrow f'(x) = 0$	$*f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
$*f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$	$*f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
$*f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$	$*f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
$*f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\cdot \ln a}$	$*f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$
$*f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$	$*f(x) = \sinh x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$
$*f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$*f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \sinh x$
$*f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	$*f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$*f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$	$*f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$*f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$*f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- Teorema (Álgebra de derivadas): Si f y g son diferenciables en x_0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces, $f \pm g$, αf, fg y f/g con $g(x_0) \neq 0$ son también diferenciables y además:
  * $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
  * $(\alpha f)' = \alpha f'$.
  * $(fg)' = f'g + fg'$.
  * $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- Teorema (Derivada de una composición, "regla de la cadena"): Sea f diferenciable en x_0 y sea g diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y además

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

- Derivada de una función inversa: Sea $f : [a, b] \to [c, d]$ una función monótona y biyectiva. Si f es diferenciable en $x_0 \in (a, b)$ y $f(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y además

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- Derivación Implícita: Existen relaciones del tipo $F(x, y) = 0$, las cuales definen alguna función $y = f(x)$ en torno de algún punto $P = (x_0, y_0)$, en las cuales no es posible despejar algebraicamente la variable dependiente y para obtener una forma explícita de la función f. en este caso se dice que la relación $F(x, y) = 0$ define a la función $y = f(x)$ en forma implícita en torno a $P = (x_0, y_0)$. Para encontrar el valor de la derivada debe conocerse el punto completo de la función (x_0, y_0).

- Operador Logarítmico: El operador $\mathcal{L}$ asigna a cada función diferenciable y no nula f, la función f'/f, es decir, es un operador tal que $f \to \mathcal{L}(f) = \ln(|f|) = \frac{f'}{f}$. $\mathcal{L}$ se denomina operador logarítmico y cumple las siguientes propiedades.

  * $\mathcal{L}(f) = f'/f \Leftrightarrow f' = f \cdot \mathcal{L}(f)$ (por definición)
  * $\mathcal{L}(f \cdot g) = \frac{(fg)'}{fg} = \mathcal{L}f + \mathcal{L}g$
  * $\mathcal{L}(f/g) = \frac{(fg)'}{fg} = \mathcal{L}f - \mathcal{L}g$
  * $\mathcal{L}(f^\alpha) = \alpha\mathcal{L}(f)$

- Derivadas de orden superior: Para $n \in \mathbb{N}$ se define $f^{(n)}(x_0)$, la derivada de orden n de f en x_0, como el valor del siguiente límite.

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

  De donde $f^{(0)}$ es la función f. Algunas observaciones importantes

  * $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$
  * $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$ y $f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$
  * Si $f^{(n)}(x_0)$ existe entonces decimos que f es derivable n veces en x_0. En este caso $\lim_{x \to x_0} f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0)$
  * Para que tenga sentido calcular $f^{(n)}(x_0)$ es necesario que: $\exists \delta > 0$ tal que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esté incluído en el dominio de la función $f^{(n-1)}$

- Derivadas n-ésimas del producto: (Fórmula de Leibniz): Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de (fg) está dada por:

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

- Polinomios de Taylor: Para f tal que $f^{(k)}(x_0)$ existe, el polinomio de Taylor de f en torno a x_0 y de orden k. está dado por

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

  * El polinomio de Taylor de la función f en torno a x_0 y de orden 1 corresponde a la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$
  * Si p es el polinomio de Taylor de la función f en torno a x_0 de orden k entonces p' es el polinomio de Taylor de la función f' en torno a x_0 y de orden $k - 1$

- Regla de L'Hópital: Para $B \in \{+\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-, x_0\}$ con g y $g'(x) \neq 0$

  * Si $\lim\limits_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ y $\lim\limits_{x\to B} f(x) = \lim\limits_{x\to B} g(x) = 0$ entonces

  $$\lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

  * Si $\lim\limits_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ y $\lim\limits_{x\to B} f(x) = \lim\limits_{x\to B} g(x) = +\infty$ entonces

  $$\lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

  El algoritmo se procede como sigue

  a) Se verifica que $\lim\limits_{x\to B} f(x) = \lim\limits_{x\to B} g(x) = 0$ o $\lim\limits_{x\to B} f(x) = \lim\limits_{x\to B} g(x) = +\infty$

  b) Se calcula f' y g'

  c) Se plantea el problema auxiliar $\lim\limits_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

  Si el límite en este problema auxiliar es l entonces el límite en el problema original también es l. Notar que también se puede aplicar para f tendiendo a ∞ y g a $-\infty$ o viceversa, ya que sólo una constante (el -1) sale del límite.

  L'Hópital se puede utilizar las veces que se requieran en un mismo límite, pero siempre verificando que existan indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.