P1/ C3 MA1001 Primavera 2018

a) $(a_n) \to \ell$. Veamos que: $u_n = a_{n+1}$ y $v_n = a_n^2$ son tq $(u_n) \to \ell$ y $(v_n) \to \ell^2$: POR DEFINICIÓN

u_n | Pdq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - \ell| \leq \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, busquemos n_0 tq $\forall n \geq n_0 \ |a_{n+1} - \ell| \leq \varepsilon$

Como $(a_n) \to \ell$, para tal $\varepsilon > 0$, $\exists \tilde{n}_0$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0 \ |a_n - \ell| \leq \varepsilon$

Así, basta tomar $n_0 = \tilde{n}_0$ (o cualquier otro mayor)

y se tiene: $\forall n.\ n+1 \geq n \geq n_0 = \tilde{n}_0$ y: $|a_{n+1} - \ell| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (a_{n+1}) \to \ell$ $\Leftrightarrow (u_n) \to \ell$.

Puntaje: 0,5 por notar que necesito $n_0 = \tilde{n}_0$; 0,5 concluir.

v_n | Pdq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ |v_n - \ell^2| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ |a_n^2 - \ell^2| \leq \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario: buscamos n_0 tal que $\forall n \geq n_0 \ |a_n^2 - \ell^2| \leq \varepsilon$

notar que: $|a_n^2 - \ell^2| = |a_n - \ell||a_n + \ell|$.

Como $(a_n) \to \ell \Rightarrow (a_n)$ es acotada $\Rightarrow (a_n + \ell)$ es acotada $\Rightarrow |a_n + \ell| \leq M \ \forall n$. $M \geq 0$

Como $(a_n) \to \ell$, para $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M}$ (Supongamos $M > 0$, si no es directo)

$\exists \tilde{n}_0$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0 : |a_n - \ell| \leq \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M}$

Luego, para todo $n \geq n_0 = \tilde{n}_0$: $|a_n^2 - \ell^2| = |a_n - \ell||a_n + \ell| \leq \tilde{\varepsilon} \cdot M = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$

y se concluye que $(a_n^2) \to \ell^2 \Leftrightarrow (v_n) \to \ell^2$.

Obs. Hay otras formas

Puntaje: 0,3 por $|a_n^2 - \ell^2| = |a_n - \ell||a_n + \ell|$; 0,3 $(a_n + \ell)$ acot.; 0,2 "buen ε" ($\tilde{\varepsilon}/M$)
0,2 concluir.

b) $a \in (0,1)$, (u_n) dada por $u_0 = a$, $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$.

i) Veamos que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq 1$.

$u_0 = a \in (0,1)$ ✓, HI. $\exists n \geq 0$, $u_n \leq 1$. ← (+0,2)

Paso induct: $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$, Calculemos $u_{n+1} - 1$:

$u_{n+1} - 1 = 2u_n - u_n^2 - 1 = -(u_n^2 - 2u_n + 1) = -(u_n - 1)^2 \leq 0$ ←(+0,5)

$\forall x: -x^2 \leq 0$

$\therefore u_{n+1} - 1 \leq 0 \iff u_{n+1} \leq 1$ ✓. y se concluye.

(+0,3) concluir.

ii) Veamos que $\forall n \geq 0$: $u_n > 0$:

CB $u_0 = a \in (0,1)$ ✓ HI: $\exists n \geq 0$: $u_n > 0$ (+0,2)

Paso induct: $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 = \underbrace{u_n}_{\substack{>0 \\ HI}} \underbrace{(2-u_n)}_{>0 \text{ pues } u_n \leq 1 \text{ por i)}} > 0$ (+0,5)

$\therefore u_{n+1} > 0$ y se concluye (+0,3) concluir.

iii) (u_n) es $\nearrow$: Calculemos $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n - u_n^2 = \underbrace{u_n}_{\substack{>0 \\ \text{ii)}}} \underbrace{(1-u_n)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{i)}}} \geq 0$.

(+0,3) (+0,4)

$\therefore u_{n+1} \geq u_n \iff (u_n) \nearrow$ (+0,3) concluir

iv) (u_n) es acot. superiormente y creciente

por Teo. suc. monot (u_n) es convergente. (+0,3)

por a): Si $u_n \to l \Rightarrow u_{n+1} \to l$ y $u_n^2 \to l^2$

luego, de la igualdad $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} l = 2l - l^2$

$\Rightarrow l^2 - l = 0$

$l(l-1) = 0$ (+0,3)

$\therefore l = 0 \vee l = 1$

↓

se descarta pues $(u_n) \nearrow$ y $u_0 = a > 0$ (def límite) (+0,2)

$\therefore \boxed{l = 1 = \lim_n u_n}$ (+0,2) concluir.

P2 a) I.- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{3n} + \operatorname{sen}(\tan(n^3) + e^{n\pi})}{\sqrt{n}+\cos(n^{100})} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{((-1)^{3n} + \operatorname{sen}(\ldots))}_{a_n} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n}+\cos(n^{100})}}_{b_n}$

Afirmación: a_n es acotada y b_n es nula:

(a_n) acot: $|a_n| = |(-1)^{3n} + \operatorname{sen}(\tan(n^3)+e^{n\pi})| \leq \underbrace{|(-1)^{3n}|}_{=1\ \forall n} + \underbrace{|\operatorname{sen}(\tan(n^3)+e^{n\pi})|}_{\leq 1\ \forall n}$

$\leq 1 + 1 = 2$. ✓ (+0,3)

(b_n) nula: Como $\cos(n^{100}) \in [-1,1]\ \forall n \geq 1$:

$\sqrt{n}-1 \leq \sqrt{n}+\cos(n^{100}) \leq \sqrt{n}+1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}+\cos(n^{100})} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\therefore$ (b_n) nula (+0,4)

$\therefore$ el lím es de la forma acotada x nula $\Rightarrow$ la sucesión es nula

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{3n} + \operatorname{sen}(\tan(n^3)+e^{n\pi})}{\sqrt{n}+\cos(n^{100})} = 0.$ (+0,3)

II.- $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+n^2}{n^2}\right)^{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$

(0,4) des componer potencias.

Notar que: $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} \to \exp(2)$, $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n} = (1+h_n)^n$ con $h_n = \dfrac{2}{n^2} \to 0$

y $nh_n = \dfrac{2}{n} \to 0$

y $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) \to 1$ $\Rightarrow \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^n \to 1$

(+0,4) argumentar límites por separado.

$\therefore$ Por álg. de límites:

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{(n+1)^2} = \exp(2)\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = e^2.$ (+0,2) Alg. de lím y conclusión.

III.- $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{(n+1)}{(2n-1)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{2n-1-n-1}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{n-2}{2n-1}\right)^n.$

(+0,3) hasta acá.

Notar que $\frac{n-2}{2n-1} \to \frac{1}{2} \Rightarrow$ para $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $\frac{n-2}{2n-1} \in \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]$

$\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{6} \leq \frac{n-2}{2n-1} \leq \frac{5}{6}$ (+0,3)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad n\left(\frac{1}{6}\right)^n \leq n\left(\frac{n-2}{2n-1}\right) \leq n\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$ pues son de la forma $n^k q^n$ con $|q|<1$

(+0,4) Sandwich y conclusión

$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n+1}{2n-1}\right)^n = 0.$

Obs: Se DEBE identificar el límite nq^n $|q|<1$ si no, descontar 0,3.

IV) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}{e^{1/n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot n\left(1-\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}{e^{1/n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{1/n}-1}}{1/n} \cdot n\left(1-\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ (+0,5) hasta acá

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n\left(1-\frac{n+1}{2n-1}\right)^n\right)}{\left(\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$; de lo anterior $a_n \to 0$

y $\frac{e^{1/n}-1}{1/n} = \frac{e^{a_n}-e^0}{a_n-0}$ con $a_n \to 0$

$\longrightarrow e^0 = 1$ (lím conocido)

Por alg. de límites

(+0,3) identificar límite tipo

$= \frac{0}{1} = 0.$

$\frac{\exp(a_n)-\exp(a)}{a_n-a} \longrightarrow \exp(a)$

si $a_n \to a$

(+0,2) conclusión.

$\boxed{¿?}$

b) PARA $n \geq 1$

$$n^2 \leq n^2+n+1 \leq n^2+2n \qquad / \div 3n$$

$$\frac{n}{3} \leq \frac{n^2+n+1}{3n} \leq \frac{n+2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{n+2} \leq \frac{3n}{n^2+n+1} \leq \frac{3}{n}$$

: HAY MUCHAS FORMAS DE OBTENER LA DESIGUALDAD PERO $n \geq 1$; Y SI LO LOGRÓ.

$\boxed{0{,}6p}$

$$a_n = \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+1}\right)^n = \left(1+\frac{3n}{n^2+n+1}\right)^n$$

$\Longrightarrow$ si $n \geq 1$

$$\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^n \leq a_n \leq \left(1+\frac{3}{n}\right)^n \longrightarrow \boxed{0{,}8p}$$

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \longrightarrow e^3 \longrightarrow \boxed{0{,}2p}$$

$$\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^2} \longrightarrow \frac{e^3}{1} = e^3$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \longrightarrow e^3 \longrightarrow \boxed{0{,}4p}$$

P3

a) Si $\lim_{x \to 0} g(x) = l$ (EXISTE)

$\Longrightarrow \forall (a_n)$ t.q. $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$

$g(a_n) \to l$.

• TOMEMOS $a_n = 1/n$; $a_n \neq 0$ y $a_n \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow g(a_n) = 0 \longrightarrow 0 \Longrightarrow l = 0$

• TOMEMOS $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$; $a_n \neq 0$ y $a_n \in \mathbb{I}$

$\Longrightarrow g(a_n) = 1 \longrightarrow 1 \Longrightarrow l = 1$

$\Longrightarrow 1 = 0$, CONTRADICCIÓN $\Longrightarrow \lim_{x \to 0} g(x)$ NO EXISTE

b) SEA (a_n) t.q. $a_n \to 1$ y $a_n \neq 1$

SEGUIMOS LA INDICACIÓN.

ELIGIENDO $\varepsilon = 1/4$, EXISTE n_0 t.q. si $n \geq n_0$

ENTONCES $a_n \in \left]1 - 1/4, 1 + \frac{1}{4}\right[= \left]3/4, 5/4\right[$

$$\Longrightarrow \frac{3}{1 + 5/4} < \frac{3}{1 + a_n} < \frac{3}{1 + 3/4} \quad \text{si } n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \frac{12}{9} < \frac{3}{1 + a_n} < \frac{12}{7} \quad \text{si } n \geq n_0$$

COMO $\frac{12}{9} = 1 + \frac{1}{3}$ y $\frac{12}{7} = 1 + \frac{5}{7}$ $\Longrightarrow h(a_n) = \left\lfloor \frac{3}{1 + a_n} \right\rfloor = 1$ si $n \geq n_0$

$\Longrightarrow h(a_n) \longrightarrow 1$

COMO (a_n) ES CUALQUIERA $\}$ $\lim h(x) = 1$

P3

PUNTAJE:

a) Mostrar **DOS** sucesiones (a_n) (o argumentar que existen) tal que

- ·) para cada una $a_n \to 0$ $\boxed{0{,}4p}$
- ·) " " " $a_n \neq 0$ $\boxed{0{,}2p}$
- ·) " " " calcular $g(a_n)$ $\boxed{0{,}4p}$
- ·) $g(a_n)$ converge a cosas distintas $\boxed{0{,}6p}$

(**Alternativa**: Mostrar **UNA** sucesión (a_n) (o argumentar que existe) tal que:

- ·) $a_n \to 0$
- ·) $a_n \neq 0$
- ·) calcular $g(a_n)$
- ·) $g(a_n)$ no converge)

Argumentar por contradicción que $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe $\boxed{0{,}4p}$

b)

- -) Trabajar con sucesión (a_n) cualquiera que $a_n \to 1$ y $a_n \neq 1$ $\boxed{0{,}4p}$
- -) Probar la indicación $\boxed{0{,}4p}$
- -) Encontrar desigualdades para $3/(1+a_n)$ con $n \geq n_0$ $\boxed{0{,}5p}$
- -) Encontrar $h(a_n)$ con $n \geq n_0$ $\boxed{0{,}3p}$
- -) Concluir que $h(a_n) \to 1$ $\boxed{0{,}2p}$
- -) Concluir que $\lim_{x \to 1} h(x) = 1$ $\boxed{0{,}2p}$

P3

c) APLICAMOS LAS DESIGUALDADES

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

A $\sqrt[k]{x}$, OBTENIENDO

$$1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} \leq \ln(\sqrt[k]{x}) \leq \sqrt[k]{x} - 1 \quad \leftarrow \boxed{0{,}5p}$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} \leq \frac{1}{k}\ln(x) \leq \sqrt[k]{x} - 1$$

$$\Longrightarrow k - \frac{k}{\sqrt[k]{x}} \leq \ln(x) \leq k\sqrt[k]{x} - k \quad \leftarrow \boxed{0{,}5p}$$

$$\Longrightarrow \frac{k}{\sqrt[k]{x}} \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt[k]{x} - 1} \leq k \quad \leftarrow \boxed{0{,}3p}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{k}{\sqrt[k]{x}} \leq \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt[k]{x} - 1} \leq k$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt[k]{x} - 1} = k \quad \leftarrow \boxed{0{,}7p}$$