



Control 3

- P1.** a) (2,0 pts.) Sea (a_n) una sucesión convergente a un real ℓ . Pruebe, usando la definición, que las sucesiones (u_n) y (v_n) dadas por $u_n = a_{n+1}$ y $v_n = a_n^2$ convergen a ℓ y ℓ^2 respectivamente.
b) Dado $a \in]0, 1[$ considere la sucesión (u_n) dada por la recurrencia:

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$$

- I. (1,0 pts.) Demuestre usando inducción que $\forall n \geq 0: u_n \leq 1$.
- II. (1,0 pts.) Demuestre usando inducción que $\forall n \geq 0: u_n > 0$.
- III. (1,0 pts.) Demuestre que (u_n) es creciente.
- IV. (1,0 pts.) Deduzca que (u_n) es convergente y usando la parte a), determine el límite de la sucesión.

- P2.** a) (4,0 pts.) Calcule los siguientes límites:

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{3n} + \sin(\tan(n^3) + e^{n\pi})}{\sqrt{n} + \cos(n^{100})}$

III. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + n^2}{n^2} \right)^{(n+1)^2}$

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{n+1}{2n-1} \right)^n$

IV. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{n+1}{2n-1} \right)^n}{e^{1/n} - 1}$

- b) (2,0 pts.) Muestre que para $n \geq 1$ se cumple $\frac{3}{n+2} \leq \frac{3n}{n^2+n+1} \leq \frac{3}{n}$, y calcule el límite de la sucesión definida por $a_n = \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+1} \right)^n$.

- P3.** a) (2,0 pts.) Considere la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Pruebe, usando la definición de límite de funciones, que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ no existe

- b) (2,0 pts.) Considere la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \left\lfloor \frac{3}{1+x} \right\rfloor$. Usando la definición de límite de funciones, pruebe que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$

[INDICACIÓN: Si $a_n \rightarrow 1$, pruebe que existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene $a_n \in]3/4, 5/4[$. Luego analice $h(a_n)$.]

- c) (2,0 pts.) Considere un entero $k \geq 1$. Aplicando las desigualdades usuales del logaritmo natural a la expresión $\ln(\sqrt[k]{x})$, concluya que

$$k - \frac{k}{\sqrt[k]{x}} \leq \ln x \leq k \sqrt[k]{x} - k.$$

Usando esto, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt[k]{x} - 1}$.

Tiempo: 3 horas.