↬ Demostraciones $\epsilon - \delta$.

Comencemos haciendo algunas observaciones sobre el valor absoluto.

Valor Absoluto. Primero recordar que si x es un número real, el *valor absoluto* de x es la distancia desde x a 0 y es escrita como $|x|$. Dicho de otra forma, podemos definir

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por tanto, si k es cualquier número real, tenemos

$$|x-k| = \begin{cases} x-k & \text{si } x > k, \\ 0 & \text{si } x = k, \\ k-x & \text{si } x < k, \end{cases}$$

tal que es natural (y útil) pensar en $|x-k|$ como la distancia de x a k. Dos equivalencias importantes que involucra el valor absoluto son

$$|x-k| < \delta \iff -\delta < x-k < \delta \iff k-\delta < x < k+\delta,$$

donde el símbolo $\iff$ significa "si y sólo si." En palabras, estas equivalencias dicen que x es menor que δ unidades de k si y sólo si la diferencia $x-k$ está entre $-\delta$ y δ si y sólo si x está en el intervalo $(k-\delta, k+\delta)$. ¡Haz el dibujo!

↬ La Definición.

Definición (informal). *Si $f(x)$ es una función definida para todos los valores de x cerca de $x = k$, excepto tal vez en $x = k$, y si ℓ es un número real tal que los valores de $f(x)$ se acercan y más a ℓ como los valores de x son tomados más cerca y más cerca de k, entonces decimos que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a k y escribimos*

$$\lim_{x \to k} f(x) = \ell.$$

Para transformar esta idea intuitiva hacia una definición precisa, necesitamos decir exactamente qué decimos por "$f(x)$ se acerca y más a ℓ como los valores de x son tomados más cerca y más cerca de k." La idea principal es notar que si dos cantidades se están "acercando y más," entonces la distancia entre ellas se convierte "más pequeña y más pequeña." Esto es, la distancia es eventualmente más pequeña que cualquier número positivo especificado.

Notar que hay una implicación en esta definición informal. A saber dice *si* permitimos a x convertirse cercano y más cercano a k, *entonces* $f(x)$ se convertirá más cerca y más cerca a ℓ. Cuando escribimos una demostración, mostramos que al tomar x suficientemente cercano a k, hacemos a $f(x)$ arbitrariamente cerca a ℓ. Sin embargo, antes podemos demostrar la implicación en la definición, necesitamos saber cuán cerca a k es suficientemente cerca; eso es que necesitamos encontrar un δ. Ahora vamos a enunciar la definición precisa.

Definición. *Suponga que k y ℓ son números reales y $f(x)$ es una función definida en un intervalo abierto que contiene a k, excepto tal vez en $x = k$. Si para cualquier número positivo $\epsilon > 0$, existe un número positivo $\delta > 0$ (que depende de ϵ) tal que*

$$0 < |x - k| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon,$$

entonces decimos que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a k y escribimos

$$\lim_{x \to k} f(x) = \ell.$$

Ejemplos. Ahora escribiremos unas pocas demostraciones para guiarte en tu propia escritura. Para enfatizar la estructura lógica de la prueba, no mostraremos cómo hallamos nuestro δ en los primeros dos ejemplos.
Ejemplo 1. *Mostrar que* $\lim_{x \to 2}(3x - 5) = 1$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y definamos $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$. Entonces si $0 < |x - 2| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} |(3x-5)-1| &= |3x-6| \\ &= 3|x-2| \\ &< 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto hemos mostrado

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |(3x - 5) - 1| < \epsilon,$$

que muestra $\lim_{x \to 2}(3x - 5) = 1$ por definición. ■

Ejemplo 2. *Mostrar que* $\lim_{x \to 4}(7x - 1) = 27$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y definamos $\delta = \dfrac{\epsilon}{7}$. Entonces si $0 < |x - 4| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} |(7x-1)-27| &= |7x-28| \\ &= 7|x-4| \\ &< 7 \cdot \frac{\epsilon}{7} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto hemos mostrado

$$0 < |x - 4| < \delta \implies |(7x - 1) - 27| < \epsilon,$$

que muestra $\lim_{x \to 4}(7x - 1) = 27$ por definición. ■
Cada uno de estos ejemplos es una prueba completa. Sin embargo, la pregunta de cómo elegimos los valores de δ no es respondida por la prueba en si misma. De hecho, algo de "trabajo desde cero" fue realizado antes en la prueba que fue escrita. Vamos a observar al trabajo desde cero ahora. (TDC será la abreviación aque adoptaremos.)

TDC para el Ejemplo 1. Deseamos $|(3x - 5) - 1| < \epsilon$ cuando $0 < |x - 2| < \delta$.
Resolvemos la desigualdad $|(3x-5)-1| < \epsilon$ para $|x-2|$:

$$|(3x-5)-1| < \epsilon \iff |3x-6| < \epsilon \iff 3|x-2| < \epsilon \iff |x-2| < \frac{\epsilon}{3}.$$

La última desigualdad muestra que deberíamos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ dado que cada paso en resolver para $|x-2|$ es reversible.**TDC para el Ejemplo 2.** Queremos $|(7x-1)-27| < \epsilon$ cuando $0 < |x-4| < \delta$.
Resolvemos la desigualdad $|(7x-1)-27| < \epsilon$ para $|x-4|$:

$$|(7x-1)-27| < \epsilon \iff |7x-28| < \epsilon \iff 7|x-4| < \epsilon \iff |x-4| < \frac{\epsilon}{7}.$$

La última desigualdad muestra que deberíamos elegir $\delta = \frac{\epsilon}{7}$ dado que cada paso en resolver para $|x-4|$ es reversible.
Si la función $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 1$, es a menudo necesario "condionar dos veces a δ." Esto es, cuando se realiza el álgebra involucrada en el TDC, necesitaremos restringir a x para acotar cualesquiera términos extraños en nuestras desigualdades. Restringiendo x es equivalente a mantenerlo dentro de una cierta distancia de k, que es de nuevo equivalente a elegir un valor para δ. Vamos a hacer esta situación más concreta por la manera de un ejemplo específico. Esta vez, revelaremos el TDC antes que escribamos la demostración formal.

Ejemplo 3. *Mostrar que* $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$.
TDC. Queremos $\left|x^2-25\right| < \epsilon$ cuando $0 < |x-5| < \delta$. Trataremos de resolver la desigualdad $|x^2-25| < \epsilon$ para $|x-5|$:

$$\left|x^2-25\right| < \epsilon \iff |x-5|\,|x+5| < \epsilon \iff |x-5| < \frac{\epsilon}{|x+5|}. \tag{1}$$

Esta situación difiere de los **Ejemplos 1** y **2** en que deseamos definir $\delta = \frac{\epsilon}{|x+5|}$, pero no podemos dado que δ que se supone que es un número que depende sólo de ϵ, no una función de x. Aquí hay una forma de remover esta dificultad: reemplazaremos $|x+5|$ en (1) por un número μ que satisface $|x+5| \leq \mu$. Al hacerlo, reescribimos (1) como

$$\left|x^2-25\right| < \epsilon \iff |x-5|\,|x+5| < \epsilon \iff \mu|x-5| < \epsilon \iff |x-5| < \frac{\epsilon}{\mu}, \tag{2}$$

y proceder como antes tomando $\delta = \frac{\epsilon}{\mu}$. Hay un problema aquí también. A saber, no hay número μ que satisface $|x+5| \leq \mu$ para todos los números reales x. Pero no estamos interesados en *todos* los números reales x, sólo esos cerca a $k = 5$. ¿Qué tan cerca? Bueno, ¡no importa! Solamente queremos acotar $|x+5|$ restringiendo a x cerca de 5, y cualquier restricción lo hará. Por ejemplo, si requerimos $0 < |x-5| < 1$ (eso es x debería ser menor que 1 unidad lejos de 5 o, equivalentemente $\delta = 1$), entonces tenemos

$$|x-5| < 1 \iff -1 < x-5 < 1 \iff 9 < x+5 < 11,$$

tal que podamos tomar $\mu = 11$. Ahora volviendo a (2), deberíamos hacer $\delta = \dfrac{\epsilon}{11}$. Recordar que también necesitamos $|x - 5| < 1$ tal que si definimos $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{11}\right\}$, entonces $0 < |x - 5| < \delta$ implica $|x-5| < 1$ y $|x-5| < \dfrac{\epsilon}{11}$.
Ahora podemos escribir la demostración formal. Notar cuán mucha más explicación está presente en el TDC que en la prueba formal.

Demostración (del Ejemplo 3). Sea $\epsilon > 0$ y definamos $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{11}\right\}$. Entonces si $0 < |x-5| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 25\right| &= |x+5|\,|x-5| \\ &< 11\,|x-5| \\ &< 11 \cdot \frac{\epsilon}{11} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto hemos mostrado

$$0 < |x-5| < \delta \implies \left|x^2 - 25\right| < \epsilon,$$

que muestra $\lim\limits_{x \to 5} x^2 = 25$ por definición. ■
Aquí hay un ejemplo más, y esta vez dejaremos el TDC al lector. De hecho, sugerimos que primero hagas tu propio TDC y escribas tu propia prueba. Después de esto, compara tu trabajo con la demostración abajo. Recordar, es poco probable que dos pruebas se leerán exactamente de la misma forma, necesitas solamente verificar la implicación en la definición con tu (deducido) valor de δ.

Ejemplo 4. *Mostrar que* $\lim\limits_{x \to 4} \left(2x^2 - x + 3\right) = 31$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y definamos $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{17}\right\}$. Entonces si $0 < |x - 4| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\left(2x^2 - x + 3\right) - 31\right| &= \left|2x^2 - x - 28\right| \\ &= |2x+7|\,|x-4| \\ &< 17\,|x-4| \\ &< 17 \cdot \frac{\epsilon}{17} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto hemos mostrado

$$0 < |x-4| < \delta \implies \left|\left(2x^2 - x + 3\right) - 31\right| < \epsilon,$$

que muestra $\lim\limits_{x \to 4} \left(2x^2 - x + 3\right) = 31$ por definición. ■
Nos acercamos en dar un ejemplo que ilustra el álgebra involucrada cuando se lidia con una función racional. Una vez más, mostraremos primero nuestro TDC involucrado en hallar δ y entonces escribir la demostración formal.

Ejemplo 5. *Mostrar que* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{4}$.

TDC. Esta vez, queremos $\left|\dfrac{1}{x+1} - 4\right| < \epsilon$ cuando $0 < |x-3| < \delta$.
Vamos a intentar resolver la desigualdad $\left|\dfrac{1}{x+1} - 4\right| < \epsilon$ para $|x-3|$:

$$\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\right| < \epsilon \iff \left|\frac{4-x-1}{4(x+1)}\right| < \epsilon \iff \left|\frac{3-x}{4(x+1)}\right| < \epsilon \iff \frac{|x-3|}{|x+1|} < 4\epsilon. \tag{3}$$

Justo como en el **Ejemplo 3**, queremos hallar un número μ tal que

$$\frac{1}{|x+1|} \leq \mu,$$

tal que podamos reemplazar $\dfrac{1}{|x+1|}$ en (3) con μ y proceder a tomar $\delta = \dfrac{4\epsilon}{\mu}$. De nuevo, no hay μ tal que $\dfrac{1}{|x+1|} \leq \mu$ para todo x, pero si $|x-3| < 1$ (en efecto si $\delta = 1$), entonces puedes mostrar que $3 < x+1 < 5$ tal que $\dfrac{1}{|x+1|} \leq \dfrac{1}{3}$. Por tanto ponemos $\mu = \dfrac{1}{3}$ y definamos $\delta = \min\{1, 12\epsilon\}$. Queda escribir la demostración.

Demostración (del Ejemplo 5). Sea $\epsilon > 0$ y definamos $\delta = \min\{1, 12\epsilon\}$. Entonces si $0 < |x-3| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4-x-1}{4(x+1)}\right| \\
&= \frac{|x-3|}{4|x+1|} \\
&< \frac{1}{3} \cdot \frac{|x-3|}{4} \\
&< \frac{1}{12} \cdot 12\epsilon \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto hemos mostrado

$$0 < |x-3| < \delta \implies \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\right| < \epsilon,$$

que muestra $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{4}$ por definición. ■