Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-1 Introducción al Cálculo
23 de Marzo de 2015

Resumen Control #1 MA1001

Dudas - Consultas - Comentarios: `gianfranco.liberona@gmail.com`

1 Axiomática de los Reales

1.1 Axiomas de Cuerpo

(A1) Conmutatividad.

(a) $(\forall x, y \in \mathbb{R}), \quad x + y = y + x.$
(b) $(\forall x, y \in \mathbb{R}), \quad x \cdot y = y \cdot x.$

(A2) Asociatividad.

(a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}), \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$
(b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}), \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

(A3) Distributividad.

(a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}), \quad x(y + z) = xy + xz.$
(b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}), \quad (x + y)z = xz + yz.$

(A4) Existencia de elementos neutros.

(a) Existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma, esto es

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + e = x,$$

todo número que verifique lo anterior será denominado *neutro para la suma*.

(b) Existen ciertos números denotados por la letra $e_2 \neq e$ que no afectan el resultado de la operación producto, esto es

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \cdot e_2 = x,$$

todo número que verifique lo anterior será denominado *neutro para el producto*.

⋆ Teorema: En el cuerpo de los reales, el neutro de la suma y el del producto son únicos. Estos neutros serán denotados por 0 y 1 respectivamente.

(A5) Existencia de elementos inversos.

– Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a él que llamaremos *opuestos o inversos aditivos* de x, que satisfacen

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

– Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen reales llamados *recíprocos o inversos multiplicativos* de x, que satisfacen

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

⋆ Teorema: Para todo $x \in \mathbb{R}$ su inverso aditivo es único. Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ distinto de cero, su inverso multiplicativo también es único. Estos elementos se denotarán $-x$ y x^{-1} respectivamente.

• Propiedad: $\forall a \in \mathbb{R}$, se cumple la igualdad $a \cdot 0 = 0$.

→ Consecuencia: No existe el inverso multiplicativo de 0.

- Propiedad: En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

  (a) $a + x = b$
  (b) $a \cdot x = b$, $a \neq 0$

  ambas poseen solución única, $x = b + (-a)$ y $x = b \cdot a^{-1}$ respectivamente.

- Definición: [Diferencia y Cuociente]

  (a) Llamaremos *diferencia entre b y a* al real $x = b + (-a)$ y lo denotaremos $x = b - a$. Así, la propiedad anterior puede enunciarse
  $$a + x = b \iff x = b - a.$$
  (b) Llamaremos *cuociente de b por a* al real $x = b \cdot a^{-1}$ y lo denotaremos $x = \frac{b}{a}$. De esta manera,
  $$a \cdot x = b \iff x = \frac{b}{a}.$$

→ Consecuencia: De la unicidad de soluciones de las ecuaciones anteriores se pueden deducir variadas leyes útiles en procesos algebraicos, tales como la ley de cancelación para la suma y para el producto.

- Propiedad: Regla de los inversos.

  (a) $\forall a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.
  (b) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \doteq \mathbb{R}^*$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

- Propiedad: Regla de los signos.

  (a) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$.
  (b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$.
  (c) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$.
  (d) Si $a, b \neq 0$, $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

- Propiedad: $x \cdot y = 0 \implies (x = 0) \vee (y = 0)$.

1.2 Axiomas de Orden

En $\mathbb{R}$ definimos su subconjunto R_+^* como aquel que contiene a los reales estrictamente positivos, el cual satisface los siguientes dos axiomas adicionales

(A6) Tricotomía: $\forall x \in \mathbb{R}$, una y sólo una de las siguientes proposiciones se cumple

  (a) $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  (b) $(-x) \in \mathbb{R}_+^*$.
  (c) $x = 0$.

(A7) Clausura: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ se cumple que $(x + y) \in \mathbb{R}_+^*$, $(x \cdot y) \in \mathbb{R}_+^*$. Es decir, $\mathbb{R}_+^*$ es cerrado para la suma y el producto.

- Definición: [Relaciones de orden] Sean $x, y \in \mathbb{R}$ se definen las relaciones $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ como

  (a) $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}_+^*$.
  (b) $x > y \iff (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$.
  (c) $x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)$.
  (d) $x \geq y \iff (x > y) \vee (x = y)$.

- Propiedad: $x > 0 \iff x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Propiedad: x es negativo $\iff x < 0$.

- Propiedad: Para cualquier par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$x < y \ , \quad x > y \quad \text{o} \quad x = y \ .$$

- Propiedad: $x < y$ y $a \in \mathbb{R} \implies x + a < y + a$.
- Propiedad: Sean $x < y$ y $a \in \mathbb{R}$,
  (a) $a > 0 \implies ax < ay$.
  (b) $a < 0 \implies ax > ay$.
- Propiedad: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$.
- Propiedad: Si $x < y$ y $u < v$, entonces $x + u < y + v$.
- Propiedad: Si $0 < x < y$ y $0 < u < v$, entonces $xu < yv$.
- Propiedad: Si $x < 0$ e $y > 0$, entonces $xy < 0$. Si $x < 0$ e $y < 0$, entonces $xy > 0$.
- Propiedad: Si $x > 0$, entonces $x^{-1} > 0$. Si $x < 0$, entonces $x^{-1} < 0$.
- Propiedad: Si $0 < x < y$, entonces $x^{-1} > y^{-1}$.

2 Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad de números reales en la que intervienen una o más cantidades genéricas. Resolver una inecuación consiste en determinar para que valores reales de las incógnitas genéricas se satisface la desigualdad.

2.1 Método General de Resolución: Inecuaciones de Grado ≥ 1

El siguiente método sirve para resolver inecuaciones del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

donde el signo $<$ puede ser también $>$, $\leq$ o $\geq$.

En primera instancia, supongamos que P y Q son expresiones que pueden descomponerse en factores de primer grado del tipo $ax + b$. Llamaremos *puntos críticos* de estas expresiones a aquellos valores donde el factor cambia de signo. En el caso anterior por ejemplo, en $x = -\frac{b}{a}$. El método para resolver estas inecuaciones sería:

(1) Determinar todos los puntos críticos de la expresión $P(x)/Q(x)$.

(2) Ordenar los puntos críticos de menor a mayor y formar los intervalos abiertos encerrados entre ellos más los dos intervalos no acotados correspondientes.

(3) Analizar el signo de $P(x)/Q(x)$ en cada uno de estos intervalos y escoger aquellos que resuelvan de buena forma el problema original.

(4) En los casos donde el signo de la inecuación sea $\leq$ o $\geq$ deben agregarse al conjunto solución los puntos críticos de $P(x)$, pues en estos puntos la fracción se anula.

Observación: En caso de que P o Q no puedan descomponerse por completo en factores de primer grado, se deben estudiar de forma especial los factores que no queden de este tipo. Por ejemplo, si se obtienen términos cuadráticos se puede calcular el discriminante asociado (si es positivo la expresión posee dos puntos críticos, si es nulo posee sólo uno y si es negativo no tiene).

2.2 Módulo o Valor Absoluto

◦ Definición: [Módulo o Valor Absoluto] Sea $x \in \mathbb{R}$, llamaremos módulo de x al real definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- Propiedades: El módulo o valor absoluto de un real cumple las siguientes propiedades

  (a) $|x| \geq 0$, y $|x| = 0 \iff x = 0$.

  (b) $|x| = |-x|$.

  (c) $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

  (d) $-|x| \leq x \leq |x|$.

  (e) $|xy| = |x| \cdot |y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

  (f) $|x - x_0| \leq a \iff x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \iff x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

  (g) $|x - x_0| \geq a \iff x \leq x_0 - a \vee x \geq x_0 + a \iff x \in (-\infty, x_0 - a] \cup [x_0 + a, \infty)$.

  (h) $|x + y| \leq |x| + |y|$. Esta última desigualdad se denomina *desigualdad triangular*.

2.3 Resolución de Inecuaciones con Módulo

Este tipo de inecuaciones pueden resolverse usando dos métodos alternativos.

(1) Usando consecutivamente propiedades del módulo o valor absoluto, de manera tal de reducir la inecuación original a muchas de primer grado. El conjunto solución será aquel que haga que se cumplan simultáneamente todas las inecuaciones obtenidas.

(2) Ubicando los puntos críticos de cada módulo (esto es, ubicar el punto en el que la expresión dentro del módulo cambia su signo) para cubrir de esta manera todos los escenarios factibles. Esto lleva a un grupo de posibles ecuaciones, que se pueden resolver con el método enunciado en la sección **2.1**.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-1 Introducción al Cálculo
09 de Abril de 2015

Resumen Control #2 MA1001

Dudas - Consultas - Comentarios: gianfranco.liberona@gmail.com

1 Geometría Analítica

1- Definición: **Lugar Geométrico** Son los puntos del plano que satisfacen alguna condición algebraica o geométrica.

2- Definición: **Distancia entre 2 puntos** $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3- Ecuación de la circunferencia

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

donde (x_c, y_c) es la coordenada del centro de la circunferencia y r es su radio.

4- Ecuación general de la recta $L : ax + by + c = 0$, con las siguientes propiedades respecto a la solución

- El conjunto vacío si $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$.
- Todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a = b = c = 0$.
- Una recta vertical si $a \neq 0$ y $b = 0$.
- Una recta horizontal si $a = 0$ y $b \neq 0$.
- Una recta oblicua (inclinada) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

5- Ecuación de la recta dado 2 puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

donde $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$ se le llama pendiente, así sabiendo la pendiente y un punto de la recta la ecuación se puede reescribir como

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Notar que la ecuación es igualmente válida si se usa (x_2, y_2) en vez de (x_1, y_1) esto porque los puntos son arbitrarios, si reordenamos la ecuación nos entrega que $y = mx \underbrace{-mx_1 + y_1}_{n} \Leftrightarrow y = mx + n$ donde n es el coeficiente de posición (punto de corte con el eje OY), esta última se llama ecuación principal de la recta.

6- Definición: **Simetral** Dados dos puntos en el plano distintos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, llamamos simetral de P y Q a la recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$ $(x, y) \in L \Longleftrightarrow d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y))$.

7- Definición: **Paralelismo** Dos rectas L y L' son paralelas (denotado como $L||L'$) si $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$ (Deben tener la misma pendiente para ser paralelas).

8- Definición: **Perpendicularidad** Dos rectas L y L' son perpendiculares u ortogonales (denotado como $L \perp L'$), si para todo par de puntos P y Q en $L, P \neq Q$, la simetral entre P y Q es paralela a L'. Se presentan algunas propiedades: Sean L y L' rectas. Entonces $L \perp L'$ si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface

- L es horizontal y L' es vertical.
- L es vertical y L' es horizontal.
- L y L' son oblicuas con pendiente m_L y $m_{L'}$, respectivamente y $m_L \cdot m_{L'} = -1$.

¡Punteo de ideas importantes!

- Dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente pero distinto coeficiente de posición.
- Por 3 puntos no colineales siempre pasa una única circunferencia.
- La intersección del radio con la recta tangente a un punto de la circunferencia es siempre perpendicular, esto por propiedad de ángulos semiinscritos a la circunferencia.
- Siempre por 2 puntos pasa una única recta, para saber si 3 o más puntos son colineales (que estén en una misma recta), basta con determinar la ecuación de la recta de 2 de ellos y verificar si pasa por el resto de los puntos.
- Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.
- Las rectas verticales son de la forma $x = a$ con a siendo el corte con el eje OX (el punto (a,0)), tienen pendiente infinita.
- Las rectas horizontales son de la forma $y = a$ con a siendo el corte con el eje OY (el punto (0,a)), tienen pendiente 0.
- Al intesectar dos rectas (igualarlas) se busca el punto (x_0, y_0) que tienen en común, por lo general la solución es única. Si las rectas son paralelas no existirá solución, si son iguales habrán infinitas soluciones.

2 Secciones Cónicas

1- <u>Definición:</u> **Cónica** Sean D y F una recta y un punto del plano tales que $F \notin D$. Sea e un número positivo. Una cónica es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su distancia a F es e-veces su distancia a la recta D. Es decir

$$P \in \text{Cónica} \Longleftrightarrow d(P,F) = e \cdot d(P,D) \qquad e > 0.$$

Dónde F es el foco de la cónica, D es la directriz (para este curso solamente será horizontal o vertical) y e es la excentricidad. Es así como para distintos valores de e tenemos las siguientes cónicas

- Si $e < 1$, se tiene una elipse, caso particular cuando $e = 0$ se tiene una circunferencia.
- Si $e = 1$, se tiene una parábola.
- Si $e > 1$, se tiene una hipérbola.

Se analizarán los puntos más importantes de estas tres cónicas

2.1 Parábola

	Vertical	Horizontal
Ecuación:	$\frac{1}{4p} \cdot (x - x_v)^2 = (y - y_v)$	$\frac{1}{4p} \cdot (y - y_v)^2 = (x - x_v)$
Vértice:	(x_v, y_v)	(x_v, y_v)
Foco:	$(x_v, y_v + p)$	$(x_v + p, y_v)$
Directriz:	$y = y_v - p$	$x = x_v - p$
	Si $p > 0$ se abre hacia arriba	Si $p > 0$ se abre hacia la derecha.
	Si $p < 0$ se abre hacia abajo	Si $p > 0$ se abre hacia la izquierda.
Recta tangente a (x_0, y_0) :	$\frac{(y_0-y_v)+(y-y_v)}{2} = \frac{1}{4p}(x - x_v)(x_0 - x_v)$	$\frac{(x_0-x_v)+(x-x_v)}{2} = \frac{1}{4p}(y - y_v)(y_0 - y_v)$

Otra forma de ver las parábolas verticales son de la clásica fórmula cuadrática $ax^2+bx+c = 0$, en donde el valor de p se obtiene de la relación $a = \frac{1}{4p} \Longleftrightarrow p = \frac{1}{4a}$ y las coordenadas del vértice se obtienen con la fórmula cuadrática conocida $(x_v, y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, a partir de estos valores se pueden obtener las ecuaciones del foco y directriz siguiendo el formulario anterior.

2.2 Elipse

	Horizontal	Vertical
Ecuación:	$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1\ a>b$	$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1\ b>a$
	Semieje mayor a	Semieje mayor b
Centro :	(x_c, y_c)	(x_c, y_c)
Excentricidad:	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$
Focos:	$(x_c+ae, y_c), (x_c-ae, y_c)$	$(x_c, y_c+be), (x_c, y_c-be)$
Directrices:	$x=\frac{a}{e}+x_c, x=\frac{-a}{e}+x_c$	$y=\frac{b}{e}+y_c, y=\frac{-b}{e}+y_c$
Recta tangente a (x_0, y_0) :	$\frac{(x_0-x_c)(x-x_c)}{a^2}+\frac{(y_0-y_c)(y-y_c)}{b^2}=1$	$\frac{(x_0-x_c)(x-x_c)}{a^2}+\frac{(y_0-y_c)(y-y_c)}{b^2}=1$

2.3 Hipérbola

	Horizontal	Vertical
Ecuación:	$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}=1$
Centro :	(x_c, y_c)	(x_c, y_c)
Excentricidad:	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$
Focos:	$(x_c+ae, y_c), (x_c-ae, y_c)$	$(x_c, y_c+be), (x_c, y_c-be)$
Directrices:	$x=\frac{a}{e}+x_c, x=\frac{-a}{e}+x_c$	$y=\frac{b}{e}+y_c, y=\frac{-b}{e}+y_c$
Recta tangente a (x_0, y_0) :	$\frac{(x_0-x_c)(x-x_c)}{a^2}-\frac{(y_0-y_c)(y-y_c)}{b^2}=1$	$\frac{(y_0-y_c)(y-y_c)}{b^2}-\frac{(x_0-x_c)(x-x_c)}{a^2}=1$

Ambos gráficos tiene asíntotas oblicuas de la forma $y-y_c=\pm\frac{b}{a}(x-x_c)$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-1 Introducción al Cálculo
19 de Abril de 2015

Resumen Control #3 MA1001

Dudas - Consultas - Comentarios: `gianfranco.liberona@gmail.com`

Funciones de Variable Real

- Definición: Se le llama función de A a B a la correspondencia que hay entre elementos de A con elementos de B, así, dado un elemento en A se le asocia un único elemento en B. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ se le llama función de variable real y si además $B = \mathbb{R}$ se llama función real de variable real. Se suele denotar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f: \ & A \Rightarrow B \\ & x \rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

- Definición: Elementos básicos de una función.
  - A es el dominio de f y se le denota $\text{Dom}(f)$. *Observación: No siempre se tendrá* $Dom(f) = \mathbb{R}$*, se entenderá por dominio a todos los elementos* $x \in A$ *tales que tengan una imagen en el codominio, o equivalentemente* $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | y = f(x) \in \mathbb{R}\}$.
  - $B = \mathbb{R}$ se llama codominio o conjunto de llegada de la función.
  - $y = f(x)$ es la imagen de x por f, y denotamos además al conjunto imagen de la función f (también conocido como recorrido) al conjunto $\text{Im}(f) = \text{Rec}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} | \ \ x \in Dom(f)\}$

- Criterios para restringir el dominio de una función.
  - Indefinición en el denominador: Cualquier $x \in \mathbb{R}$ que anule el denominador de una fracción en la función que estemos trabajando, se debe eliminar del dominio. Por ejemplo, para $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ debemos quitar del dominio a los valores $x = \pm 1$ puesto que indefinen a f, por lo tanto en un caso así, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}/\{-1, 1\}$.
  - Raíces: Las raíces pares están siempre bien definidas cuando su argumento es una cantidad positiva, por lo que deberemos excluir a todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que entreguen valores negativos dentro de ella (esto conducirá a resolver una inecuación). Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Como esta raíz se encuentra bien definida en $\mathbb{R}^+$, nos toca resolver la siguiente inecuación para determinar su dominio

$$\sqrt{1 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1].$$

    Luego, $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$.

- Ceros de una función: Este conjunto reúne a todos los $x \in Dom(f)$ tales que $f(x) = 0$. También se le conoce como el conjunto de las intersecciones de f con el eje OX. En el caso de los polinomios, a los valores de x en este conjunto también se les llama raíces.

- Paridad: Sea f una función tal que su dominio verifica que si $x \in \text{Dom}(f)$, entonces $-x$ también.
  - Funciones pares: Son aquellas que verifican que $\forall x \in \text{Dom}(f)$, $f(-x) = f(x)$. Las funciones pares presentan simetría axial respecto al eje OY en su gráfico, por lo que para analizarlas basta con ver su comportamiento en $\mathbb{R}^+$ y para $\mathbb{R}^-$ su comportamiento será simétrico respecto al eje de las ordenadas.
  - Funciones impares: Son las que cumplen que $\forall x \in \text{Dom}(f)$, $f(-x) = -f(x)$. Las funciones impares presentan simetría central respecto al origen en su gráfico, por ende tal como las funciones pares, para analizarlas basta con ver su comportamiento en $\mathbb{R}^+$ y para $\mathbb{R}^-$ su comportamiento será simétrico respecto a este punto. Notar además, que su gráfico siempre pasan por el origen.

- Funciones periódicas: Son aquellas que verifican la existencia de $p \neq 0$ tal que $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(x+p) = f(x)$. A este valor p se le denomina período de la función.

- Crecimiento:

  - f se dice creciente en un intervalo $B \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ si

  $$\forall x_1, x_2 \in B, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

  Si la última desigualdad se cumple de forma estricta, f se llamará función estrictamente creciente.

  - f se dice decreciente en un intervalo $B \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ si

  $$\forall x_1, x_2 \in B, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

  Si la última desigualdad se cumple de forma estricta, f se llamará función estrictamente decreciente.

  Observación: Existen funciones crecientes y decrecientes a la vez, como por ejemplo las funciones constantes. Además, el hecho que una función no sea decreciente no significa que tenga que ser creciente o viceversa.

- Cotas de una función:

  - Diremos que una función es acotada superiormente si $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que

  $$\forall x \in \mathrm{Dom(f)}, \quad f(x) \leq a.$$

  - Diremos que una función es acotada inferiormente si $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que

  $$\forall x \in \mathrm{Dom(f)}, \quad f(x) \geq b.$$

  - Diremos que una función es acotada, si es acotada tanto superiormente como inferiormente.

- Máximos y mínimos:

  - Diremos que x_0 es punto máximo global de f si $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ y además

  $$\forall x \in \mathrm{Dom}(f), \quad f(x_0) \geq f(x).$$

  - Diremos que x_0 es punto mínimo global de f si $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ y además

  $$\forall x \in \mathrm{Dom}(f), \quad f(x_0) \leq f(x).$$

  Existen puntos que se les llama máximos y mínimos locales, que también son máximos o mínimos en la función, pero cuando ésta se encuentra restringida a una vecindad del punto y no necesariamente a todo el dominio.

- Álgebra de funciones: La suma, la resta, la multiplicación y la división de funciones entrega como resultado una nueva función, cuyo dominio es la intersección de los dominios originales. Caso especial existe para la división, donde también se hace necesario excluir del dominio de la función, a los ceros de la función utilizada como denominador.

- Ejemplo Especial: Funciones polinomiales

  $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

  Estudiaremos sus asíntotas

  - Se define informalmente asíntota horizontal al valor que tiende la función cuando "se evalúa en el infinito". Existirán asíntotas horizontales si $m = n$ en cuyo caso el valor de la asíntota será $\frac{a_n}{b_m}$, si $m > n$ entonces la asíntota valdrá 0 (intuitivamente, el denominador "le gana" al numerador) y si $m < n$ entonces la función crece indefinidamente (en este caso es el numerador quien "le gana" al denominador) y no existen asíntotas horizontales.
  - Se le llama asíntota vertical a los valores de x tales que $Q(x) = 0 \wedge P(x) \neq 0$. El valor en la función en esos puntos se dispara al $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del caso y se representan mediante una recta vertical.

- Inyectividad, epiyectividad, biyectividad y Función Inversa:
  - Una función es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$,
  $$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$
    En palabras, si tenemos dos elementos con imágenes iguales, esto quiere decir que en realidad estos dos elementos son el mismo, o pensándolo a través de la contrarrecíproca, si tenemos pre-imágenes distintas, esto quiere decir que sus imágenes deberán también ser distintas. Una manera fácil de detectar no inyectividad de forma intuitiva (teniendo el bosquejo de la función) es trazar una línea horizontal, si se corta la gráfica de nuestra función en más de un punto, entonces no puede ser inyectiva.
  - Una función es epiyectiva (o sobreyectiva) si $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \text{Dom}(f))$ tal que $f(x) = y$. En palabras, para cualquier elemento en el codominio (conjunto de llegada), deberemos ser capaces de encontrar un x en el dominio tal que al evaluarlo en la función, obtengamos y.
  - Cuando una función verifica estas dos condiciones, se dice que es biyectiva y posee una función inversa $f^{-1}(y) = x$. En el caso de esta función, los papeles de dominio y codominio se invierten. Una vez demostrado que la inversa existe (vale decir, cuando hemos probado que la función trabajada es biyectiva), el cálculo de ésta consiste en despejar x en función de y.

Trigonometría

- Descripción general de funciones seno, coseno y tangente
  a) $\text{sen}(x)$. Dominio: $\mathbb{R}$, Recorrido: [-1,1], impar, periódica de período 2π, ceros= $\text{sen}^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Positiva entre 0 y π, creciente entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y decreciente entre $\frac{\pi}{2}$ y π.
  b) $\cos(x)$. Dominio: $\mathbb{R}$, Recorrido: [-1,1], par, periódica de período 2π, ceros= $\cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Positiva entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y negativa entre $\frac{\pi}{2}$ y π, decrece entre 0 y π.
  c) $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$. Dominio: $\mathbb{R}$ excluyendo los ceros de $\cos(x)$, Recorrido: $\mathbb{R}$, impar, periódica de período π, sus ceros son los mismos de $\text{sen}(x)$, positiva en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y estrictamente creciente en intervalos $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.
- Funciones recíprocas
  a) $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
  b) $\csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$
  c) $\cot(\alpha) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$
- Identidades Fundamentales
  a) $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$
  b) $\sec^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha).$
  c) $\csc^2(\alpha) = 1 + \cot^2(\alpha).$
- Identidades de suma y resta de ángulos
  a) $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)$
  b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \text{sen}(\beta)\,\text{sen}(\alpha)$
  c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \pm \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$
- Identidades de suma y resta de senos y cosenos
  a) $\text{sen}(\alpha) \pm \text{sen}(\beta) = 2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha \pm \beta}{2})\cos(\frac{\alpha \mp \beta}{2})$
  b) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  c) $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\,\text{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  d) $\tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

- Identidades de ángulos doble y medio

a) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$	b) $\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
c) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$	d) $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
e) $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$	f) $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

El signo del ángulo medio depende de en qué cuadrante esté $\frac{\alpha}{2}$

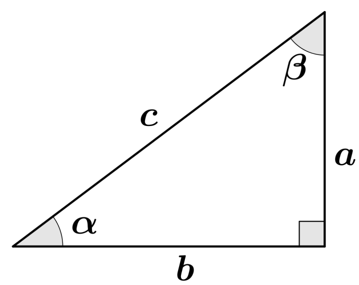
- Regla de cuadrantes

a) $\operatorname{sen}(2\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{sen}(\alpha)$	b) $\operatorname{sen}(\pi \pm \alpha) = \mp\operatorname{sen}(\alpha)$	c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos(\alpha)$
a) $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	b) $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{sen}(\alpha)$

- Tabla de valores importantes

$x°$ (grados)	x (radianes)	sen(x)	cos(x)	tan(x)
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-

- Representación en triángulo rectángulo



a) $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{a}{c}$.

b) $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c}$.

c) $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b}$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-1 Introducción al Cálculo
05 de Mayo de 2015

Resumen Control #4 MA1001

Dudas - Consultas - Comentarios: gianfranco.liberona@gmail.com

1 Trigonometría (Recuerdo Control Anterior y Materia Nueva)

1.1 Descripción general de funciones seno, coseno y tangente

a) $\text{sen}(x)$. Dominio: $\mathbb{R}$, Recorrido: [-1,1], impar, periódica de período 2π, ceros= $\text{sen}^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Positiva entre 0 y π, creciente entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y decreciente entre $\frac{\pi}{2}$ y π.

b) $\cos(x)$. Dominio: $\mathbb{R}$, Recorrido: [-1,1], par, periódica de período 2π, ceros= $\cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Positiva entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y negativa entre $\frac{\pi}{2}$ y π, decrece entre 0 y π.

c) $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$. Dominio: $\mathbb{R}$ excluyendo los ceros de $\cos(x)$, Recorrido: $\mathbb{R}$, impar, periódica de período π, sus ceros son los mismos de $\text{sen}(x)$, positiva en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y estrictamente creciente en intervalos $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

1.2 Funciones recíprocas

a) $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

b) $\csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$

c) $\cot(\alpha) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$

1.3 Identidades Fundamentales

a) $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

b) $\sec^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha)$.

c) $\csc^2(\alpha) = 1 + \cot^2(\alpha)$.

1.4 Identidades de suma y resta de ángulos

a) $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)$

b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \text{sen}(\beta)\,\text{sen}(\alpha)$

c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \pm \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

1.5 Identidades de suma y resta de senos y cosenos

a) $\text{sen}(\alpha) \pm \text{sen}(\beta) = 2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha \pm \beta}{2})\cos(\frac{\alpha \mp \beta}{2})$

b) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$

c) $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha + \beta}{2})\,\text{sen}(\frac{\alpha - \beta}{2})$

d) $\tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

1.6 Identidades de ángulos doble y medio

a) $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ b) $\text{sen}(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

c) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$ d) $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

e) $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$ f) $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

El signo del ángulo medio depende de en qué cuadrante esté $\frac{\alpha}{2}$

1.7 Regla de cuadrantes

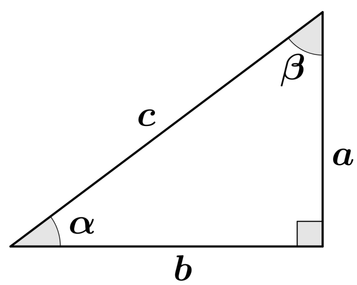
a) $\text{sen}(2\pi \pm \alpha) = \pm\,\text{sen}(\alpha)$ b) $\text{sen}(\pi \pm \alpha) = \mp\,\text{sen}(\alpha)$ c) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos(\alpha)$

a) $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos(\alpha)$ b) $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\,\text{sen}(\alpha)$

1.8 Tabla de valores importantes

$x°$ (grados)	x (radianes)	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-

1.9 Representación en triángulo rectángulo



a) $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{a}{c}$.

b) $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c}$.

c) $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b}$.

1.10 Teoremas del Seno y del Coseno

Sea un triángulo ABC cualquiera de lados a, b, c y sus ángulos interiores respectivos α, β, γ (opuestos a a, b y c respectivamente, como el triángulo anterior pero sin la necesidad de que γ sea recto), se cumplen las siguientes relaciones

a) Teorema del Seno:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

b) Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta).$$

1.11 Funciones trigonométricas inversas

a) $\arcsin(x)$: Dominio: $[-1,1]$, Recorrido: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x$.

b) $\arccos(x)$: Dominio: $[-1,1]$, Recorrido: $[0,\pi]$; $\cos(x) = y \Leftrightarrow \arccos(y) = x$.

c) $\arctan(x)$: Dominio: $\mathbb{R}$, Recorrido: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $\tan(x) = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x$.

1.12 Soluciones de ecuaciones trigonométricas

a) $\sin(x) = a$: Las soluciones son de la forma
$$x = k\pi + (-1)^k\alpha,$$
con $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\arcsin(a) = \alpha$.

b) $\cos(x) = a$: En este caso, las soluciones son de la forma
$$x = 2k\pi \pm \alpha,$$
con $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\arccos(a) = \alpha$.

c) $\tan(x) = a$: Aquí tenemos soluciones de la forma
$$x = k\pi + \alpha,$$
con $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\arctan(a) = \alpha$.

Notar que en el caso de las dos primeras ecuaciones, es necesario que $|a| \leq 1$, pues en caso contrario no existen soluciones.

2 Axioma del Supremo

2.1 Definiciones Básicas

a) Un conjunto A se dice *acotado superiormente* si existe un real $c \in \mathbb{R}$ que sea mayor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que
$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq c.$$
A c se le denomina *cota superior* del conjunto A, y si además $c \in A$ se denomina *máximo* del conjunto. Notar que cualquier otro real mayor o igual a una cota superior de A, también es cota superior del conjunto.

b) Un conjunto A se dice *acotado inferiormente* si existe un real $d \in \mathbb{R}$ que sea menor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que
$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \geq d.$$
A d se le denomina *cota inferior* del conjunto A, y si además $d \in A$ se denomina *mínimo* del conjunto. Notar que cualquier otro real menor o igual a una cota inferior de A, también es cota inferior del conjunto.

c) Un real $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo* de un conjunto A (y lo denotamos $s = \sup(A)$), si es cota superior de él y a la vez es la menor de las cotas superiores. Cuando el máximo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su supremo.

d) Un real $s \in \mathbb{R}$ se dice *ínfimo* de un conjunto A (y lo denotamos $s = \text{ínf}(A)$), si es cota inferior de él y a la vez es la mayor de las cotas inferiores. Cuando el mínimo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su ínfimo.

2.2 Axioma del Supremo

a) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente, posee supremo.

b) Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente, posee ínfimo.