Revisión de " $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ "

(1) Se propone el conjunto $A = \{x \geq 0 \mid x^2 \leq 2\}$

Y se intenta probar que $\sqrt{2} = \operatorname{Sup} A$. Para esto A debe tener supremo, llamemoslo s. Luego se debe probar que $s^2 = 2$.

(2) Para probar que $\exists s = \operatorname{Sup} A$ se utilizará el axioma del supremo.

2.1 $A \neq \phi$ ¿Porque?

2.2 A es acotado superiormente. ¿Por qué?

Previo, probar las siguientes propiedades

2.2.1 En $\mathbb{R}_+$ $a < b \iff a^2 < b^2$

2.2.2 Sea $a \in \mathbb{R}_+$ tal que $a^2 > 2$.
Para un tal a se cumple $[a < x \Rightarrow x \notin A]$
o equiv. $[x \in A \Rightarrow x \leq a]$ (contrarecíproca)

Con lo anterior, puede probar que 2 es cota superior de A.

Conclusión: Podemos aplicar el axioma del supremo a A

Podemos definir $s = \text{Sup } A$. Para demostrar que $s^2 = 2$, nos basaremos en "axioma" de tricotomia

Solo 1 es verdadera $[s^2 < 2]$; $[s^2 = 2]$; $[s^2 > 2]$

Si descartamos 2 de las 3 posibilidades, la que queda debe necesariamente ser verdadera.

③ Probar que $s^2 < 2$ se debe descartar.

¿Como? Si Suponemos $s^2 < 2$ llegamos a una contradicción.

3.1 Probar que existe $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ tal que

$$(s+\varepsilon)^2 < 2$$

(se debe ver esto como una inecuación para ε, y debemos encontrar una solución $\varepsilon > 0$)

3.1.1 probar que $(s+\varepsilon)^2 \leq s^2 + (2s+1)\varepsilon$

3.1.2 encontrar un $\varepsilon > 0$ solución de $s^2 + (2s+1)\varepsilon < 2$

(resp. $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{2-s^2}{2s+1}\right)$)

3.1.3 tal $\varepsilon > 0$ encontrado sirve en 3.1

3.2 Con esto, obtenemos una contradicción

(s no sería cota superior. ¿Por que?)

(4) Se debe descartar $s^2>2$. Para esto supongamos ahora $\underline{s^2>2}$ y obtengamos una contradicción

4.1 Probar que existe un $\varepsilon>0$ tal que

$$2<(s-\varepsilon)^2=s^2-2s\varepsilon+\varepsilon^2$$

4.1.1 Probar $s^2-2s\varepsilon<s^2-2s\varepsilon+\varepsilon^2$ (fácil)

4.1.2 Encontrar una solución de

$$2<s^2-2s\varepsilon \qquad \left(\text{resp: } \varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{s^2-2}{2s}\right)\right)$$

4.1.3 Probar que este $\varepsilon>0$ solución de 4.1.2 es uno de los $\varepsilon>0$ que prueba 4.1

4.2 Con esto, obtenemos una contradicción

Para esto, justifique que $s-\varepsilon$ es cota superior de A (use 2.2.2)

Esto contradice "s es el <u>supremo</u> de A"

¿Por qué?