MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 8: Té supremo

09 de Mayo de 2019

P1. ***[Té Supremo CEYLÁN ORO]***

Dado el siguiente conjunto ,justifique existencia según corresponda y encuentre supremo, ínfimo, mínimo y máximo.

$$\mathcal{F} = \{x/x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

P2. ***[C4MA1001-1-2010][Té Supremo EARL GREY]***

Considere el conjunto A definido como

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q}/x \cdot (x^2 - 2) \leq 0\}$$

Determine, si es que existen, conjutno de cotas superiores e inferiores de A, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A. Justifique su respuesta brevemente la existencia de los conjuntos y elementos pedidos.

P3. ***[Té Supremo ROYAL DARJEELING]***

Sean $\mathbb{A}$,$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}$ conjutnos no vacíos y acotados, pruebe que:

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbf{inf}(\mathbb{B}) \leq \mathbf{inf}(\mathbb{A}) \leq \mathbf{sup}(\mathbb{A}) \leq \mathbf{sup}(\mathbb{B})$$

P4. ***[Té Supremo HIERBA LIMÓN FRAMBUESA]***

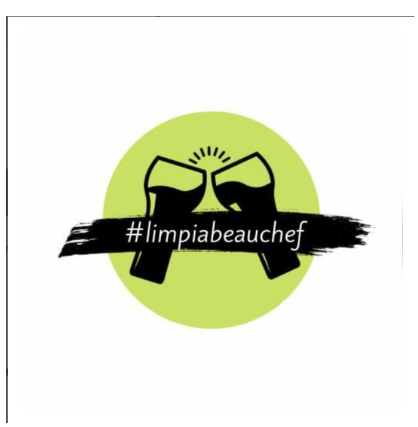
Sean $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjutno $f(\mathbb{A}) = \{f(x)/x \in \mathbb{A}\}$ tiene ínfimo y supremo, y que:

$$f(\mathbf{sup}(\mathbb{A})) \leq \mathbf{inf}(f(\mathbb{A})) \leq \mathbf{sup}(f(\mathbb{A})) \leq f(\mathbf{sup}(\mathbb{A}))$$

P5. ***[Té Supremo 1875 ORIGINAL BLEND]***

Sean $\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$,$\mathbb{C}$ subconjutnos no vacíos y cotados de $\mathbb{R}$. Pruebe que si $\forall x \in \mathbb{A}$,$\forall y \in \mathbb{B}$,$\forall y \in \mathbb{B}$

$$x - y \leq z \Rightarrow \mathbf{sup}(\mathbb{A}) \leq \mathbf{sup}(\mathbb{B}) + \mathbf{sup}(\mathbb{C})$$



#limpiabeauchef

Axioma del Supremo

Definición (Acotado)**.** $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \text{ acotado superiormente } \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$$

$$A \text{ acotado inferiormente } \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq m$$

$$A \text{ acotado } \Leftrightarrow A \text{ acotado superior e inferiormente}$$

Notación. M es cota superior de A, m es cota inferior de A.

Definición (Máximo y Mínimo)**.** $A \subseteq \mathbb{R},\ M, m \in \mathbb{R}$:

$$M \text{ máximo de } A \Leftrightarrow M \in A \wedge M \text{ cota superior}$$

$$m \text{ mínimo de } A \Leftrightarrow m \in A \wedge m \text{ cota inferior}$$

Definición (Supremo e Ínfimo)**.** $A \subseteq \mathbb{R},\ s, u \in \mathbb{R}$:

$$s \text{ supremo de } A \Leftrightarrow s \text{ cota superior } \wedge \forall M \text{ cota superior de } A,\ s \leq M$$

$$u \text{ ínfimo de } A \Leftrightarrow u \text{ cota inferior } \wedge \forall m \text{ cota inferior de } A,\ u \geq m$$

Proposición 1 (Caracterización vía ε)**.** $A \subseteq \mathbb{R},\ s, u \in \mathbb{R}$:

$$s \textit{ supremo de } A \Leftrightarrow s \textit{ c.s. de } A \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, s - \varepsilon < x$$

$$u \textit{ ínfimo de } A \Leftrightarrow u \textit{ c.i. de } A \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, u + \varepsilon > x$$

Proposición 2. $A \subseteq \mathbb{R},\ M, m \in \mathbb{R}$:

$$M \textit{ máximo de } A \Rightarrow \exists s \textit{ supremo de } A \wedge s = M$$

$$m \textit{ mínimo de } A \Rightarrow \exists u \textit{ ínfimo de } A \wedge u = m$$

Axioma 1 (Axioma del Supremo)**.**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \phi \wedge A \textit{ acot. sup. } \Rightarrow \exists s \textit{ supremo de } A$$

Proposición 3 (Propiedad del Ínfimo)**.**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \phi \wedge A \textit{ acot. inf. } \Rightarrow \exists u \textit{ ínfimo de } A$$

Definición (Raíz Cuadrada)**.** $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{x} = sup\{r \in \mathbb{R} / r^2 \leq x\}$$

Definición (Raíz Enésima)**.** $x \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{x} = sup\{r \in \mathbb{R}_+^* / r^n \leq x\}$$

Teorema. *Los naturales no son acotados superiormente.*

Teorema (Propiedad Arquimediana)**.** $\mathbb{R}$ *es Arquímediano, es decir:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon > 1$$