$c)$ Para el mismo valor de r, obtenga cotas para α.

Solución.

Para aclararnos, veamos un bello mapa de la situación:

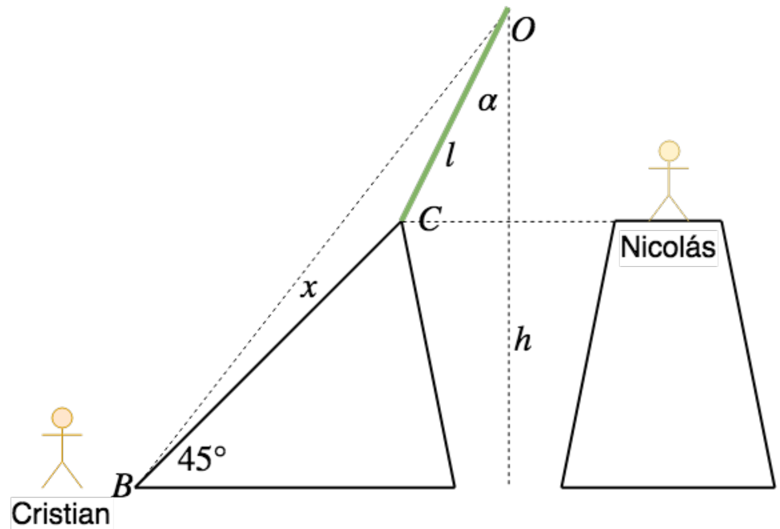

Figura 1: Diagrama de la situación.

Para este problema, despreciaremos la altura de Cristian, considerándolo una partícula puntual sin roce, okno. Luego, el largo mínimo de la liana es tal que llegue justo a la cima de la colina.

Viendo el dibujo, notamos que por trigonometría del triángulo rectángulo, se tiene que:

$$tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{lcos(\alpha)+h}{h+lsen(\alpha)} \qquad / \ (1)$$

Aquí tenemos un problema, pues hay dos incógnitas, luego debemos usar la ecuación que cumple x y siguiendo la indicación:

$$r=\frac{sen(x)+cos(x)}{cos(x)-sen(x)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}sen(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}cos(x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}sen(x)}$$

Notando que $\frac{1}{\sqrt{2}}=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, motivados por intentar hacer aparecer $tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, tenemos que:

$$r=\frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)sen(x)+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x)}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x)-sen\left(\frac{\pi}{4}\right)sen(x)}=\frac{sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Reemplazando en (1), y resolviendo:

$$r = \frac{lcos(\alpha) + h}{h + lsen(\alpha)} \Leftrightarrow rh + lrsen(\alpha) = lcos(\alpha) + h$$
$$\Leftrightarrow h(r-1) = l(cos(\alpha) - rsen(\alpha))$$
$$\Leftrightarrow \frac{h(r-1)}{cos(\alpha) - rsen(\alpha)} = l$$

Realizando un proceso similar al de la parte anterior para hacer aparecer la tangente, se obtiene:

$$r = tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Luego, como x debe ser menor a $\frac{\pi}{4}$, puesto que sino no se puede subir la colina, y como la tangente es inyectiva en cada intervalo de la forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ con k entero, se obtiene que:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

En principio están las cotas $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pues fuera de ese rango se pierde el sentido físico del problema. Pero podemos ir aún más allá, cuestionándonos los resultados anteriores, en particular el primero, sabemos que l por ser una longitud debe ser positiva, luego, la expresión calculada en la primera parte debe serlo:

$$l = \frac{h(r-1)}{cos(\alpha) - rsen(\alpha)} > 0$$

Como $h > 0$ y notando que $r > 1$, debemos verificar que el denominador sea positivo:

$$cos(\alpha) - rsen(\alpha) > 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) > rsen(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow cotan(\alpha) > r$$

Reemplazando el valor de r en forma de tangente:

$$\Leftrightarrow cotan(\alpha) > tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Aquí vemos que, para poder avanzar podría ser útil tenerlo todo en expresiones de tangente, luego, usando el resultando de la $P1(c)$:

$$\Leftrightarrow tan\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Luego, por las cotas iniciales de α, $-\alpha+\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, luego como la tangente es creciente en intervalos de la forma $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ con k entero:

$$\Leftrightarrow -\alpha+\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}>\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\pi-4\pi}{24}>\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}>\alpha$$

$\therefore \frac{\pi}{12}>\alpha>0,\quad$ Es el rango válido para α.