MA1101-3 Introducción al Álgebra
MA1001-3 Introducción al Cálculo
Profesores: Pablo R. Dartnell R. , Leonardo Sánchez C.
Auxiliares: Felipe Hernández C. , Patricio Yáñez A.

Auxiliar Extra Control 2

18 de Abril de 2019

P1. ***Equivalencia loca Partición***

Sea Ω un conjunto fijo y sea $P = \{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, demuestre que:

$$P \text{ es partición de } \Omega \iff (\forall w \in \Omega)(\exists! k \in \{1, 2, ..., n\})[w \in A_k] \wedge (\emptyset \notin P)$$

P2. ***Equivalencia loca Sobreyectividad***

Sea $f : A \longrightarrow B$ función, con A y B no vacíos. La idea de esta pregunta es demostrar que:

$$(\forall C \neq \emptyset)(\forall g, h : B \longrightarrow C \text{ funciones})g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Para esto:

a) Demuestre la implicancia hacia la izquierda ($\Longleftarrow$)

b) Para la implicancia hacia la derecha ($\Longrightarrow$), primero definimos el conjunto $f(A) := \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$.

- I) Demuestre que $f(A) \neq \emptyset$
- II) Suponga por contradicción que f no es sobreyectiva. Demuestre que $\exists y \in B, y \notin f(A)$.
- III) Sea $\overline{y} \in f(A)$. Defina las funciones $g, h : B \longrightarrow C$ tal que $h(z) = z$ (identidad) y:

$$g(z) = \begin{cases} z & si \quad z \neq y \\ \\ \overline{y} & si \quad z = y \end{cases}$$

  Demuestre que $g \circ f = h \circ f$
- IV) Usando la hipotesis de la implicancia muestre que $y = \overline{y}$ y concluya.

P3. ***[Completitud de funciones]***

Sea $f(x) = \dfrac{|x| + 1}{|x| - 1}$

a) Determine dominio, ceros, paridad y periodicidad de f

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

c) Bosqueje el gráfico de f y determine su recorrido

P4. ***[Teóricamente funcionamos?]***

Para $a, b \in \mathbb{R}$ se defina la función $f_{a,b}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula:

$$f_{a,b}(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$$

a) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$

b) Si $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva y determine $f_{a,b}^{-1}$

c) Si $a \neq 0$, determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$

Problemas propuestos

I. Algebra

P5. *Componiendo la vida*
Sean A, B y C conjuntos no vacios y sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$ tales que $h \circ f \circ g \circ f \circ h$ es biyectiva. Demuestre que f, g y h son biyectivas.

P6. *Equivalencia loca Inyectividad*
Sea $f : A \longrightarrow B$ función, con A y B no vacíos. Pruebe que:

$$(\forall C \neq \emptyset)(\forall g, h : C \longrightarrow A \text{ funciones}) f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h] \Longleftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

P7. πp-*composición*
Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple que $p(p(x)) = \pi x + \pi$. Demuestre que p es biyectiva.

II. Calculo

P8. *[Sigamos volando]C2-2014-1-P1*
Un punto A se mueve sobre la parábola de ecuación $x^2 = 4py$ de foco $F = (0, p)$ y el vértice $O = (0, 0)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $P = (\alpha, \beta)$ que satisfacen la siguiente condición:

El punto A, intersección de la recta $\bar{OP}$ con la parábola, y el punto B, intersección de la recta $\bar{FP}$ y el eje OX, tienen la misma abscisa

P9. *[Otro función loca por allí]*
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

a) Determine el dominio de f.

b) Demuestre que f es par.

c) A partir de lo anterior, determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva

d) Determine la función inversa

e) Grafique.