MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 5: Elipses y Funciones en una Variable

10 de Abril de 2019

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \to B$. f es inyectiva cuando
$$(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \to B$. f es sobreyectiva cuando
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$$
- Biyectividad: Sea $f : A \to B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto
$$Z(f) == \{x \in Dom(f) | f(x) = 0\}$$
- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B
    - f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
    - f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
    - f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
    - f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
    - Además, si $A = B$ diremos que f es monótona creciente o decreciente según corresponda
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
    - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = x$
    - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$

P1. [Elipses y rectas]C2-MA1001-2015.P1

Considere las rectas $L_1 : x = A$, $L_2 : y = B$ y el punto $F(f, B)$ sobre la recta L_2, donde $f > A$ .Si $\bar{F}$ es el simétrico de F con respecto a la recta L_1, encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son F y $\bar{F}$ y cuyo semieje mayor mide a, donde $a > f - A$
Indique cuánto vale la excentricidad de la elipse y encuentre las ecuaciones de sus directrices.

P2. Considere la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto (x_0, y_0), tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0), como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima.
Nota:Utilice propiedades de parábolas.

P3. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

c) $f(x) = |x^2| - 2$

d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

P4. Determine la paridad, ceros y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$
b) $g(x) = f(x+1)$
c) $h(x) = f(|x|)$

P5. Sea las siguientes funciones analice sus características y luego grafiquelas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+2}$

P6. Considere la función f definida por $\dfrac{x}{x^2-1}$.Se pide

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.
b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(1 + x_2 \cdot x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{((x_1)^2 - 1)((x_2)^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f, indicando en que intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.
c) Calcule $f((1, \infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{gathered}\iota(x) : (1, \infty) \to f((1, \infty)) \\ x \to \iota(x) := f(x)\end{gathered}$$

es biyectiva y determine su inversa.
d) Bosqueje el gráfico de f

1. Propuestos:

P7. Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x^2+1}$
c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4}$