



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 09-1

Control 1

- P1.** (2,0 pts.) Un punto P cualquiera de la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = a^2$ ($a > 0$) se une con los puntos extremos del eje mayor de la elipse $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$. Las rectas $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ cortan a las rectas verticales $x = a$ y $x = -a$ en los puntos C y D respectivamente.

Demuestre que las rectas $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$ (O es el origen) son perpendiculares.

- P2.** (2,0 pts.) Sea la parábola de ecuación $y^2 = 4px$, con $p > 0$ y P un punto cualquiera sobre ella. La recta perpendicular a $\overline{OP}$ (O es el vértice de la parábola) por el punto P intersecta al eje OX en el punto B y la proyección vertical de P sobre el eje OX es el punto A .

Demuestre que la longitud del trazo $\overline{AB}$ es constante e indique su valor.

- P3.** (2,0 pts.) Un triángulo ABC isósceles con $\overline{AB} = \overline{CB}$ varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el punto $A(-a, 0)$, su vértice B se mueve sobre el eje OY y el lado $\overline{CB}$ es horizontal.

Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el vértice C e identifíquelo, determinando, si corresponde, focos, directrices y excentricidad.

13 de abril de 2009
Sin consultas
Tiempo: 1:15



Pauta Control 2

- P1.** Un punto P cualquiera de la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = a^2$ ($a > 0$) se une con los puntos extremos del eje mayor de la elipse $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$.
Las rectas $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ cortan a las rectas verticales $x = a$ y $x = -a$ en los puntos C y D respectivamente.
Demuestre que las rectas $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$ (O es el origen) son perpendiculares.

Solución:

Sea $P(x_0, y_0)$ el punto que recorre la elipse.

La recta por $A(-a, 0)$ y $P(x_0, y_0)$ será: $y = \frac{y_0}{x_0 + a}(x + a)$.

Su intersección con la vertical $x = a$ nos da las coordenadas de $C\left(a, \frac{2ay_0}{x_0 + a}\right)$ (1.5 puntos)

Análogamente, la recta por $B(a, 0)$ y $P(x_0, y_0)$ es: $y = \frac{y_0}{x_0 - a}(x - a)$ y su intersección con la vertical $x = -a$ nos da las coordenadas de $D\left(-a, \frac{-2ay_0}{x_0 - a}\right)$ (1.5 puntos)

Así, la pendiente de $\overline{OC}$ es $m_{OC} = \frac{2ay_0}{a(x_0 + a)} = \frac{2y_0}{x_0 + a}$ y la pendiente de $\overline{OD}$ es $m_{OD} = \frac{-2ay_0}{-a(x_0 - a)} = \frac{2y_0}{x_0 - a}$ (1.5 puntos)

Sigue que $m_{OC} \cdot m_{OD} = \frac{4y_0^2}{x_0^2 - a^2}$. Pero P está en la elipse, es decir $x_0^2 + 4y_0^2 = a^2$,

de donde $m_{OC} \cdot m_{OD} = \frac{4y_0^2}{-4y_0^2} = -1$. Entonces $\overline{OC} \perp \overline{OD}$ (1.5 puntos)

- P2.** Sea la parábola de ecuación $y^2 = 4px$, con $p > 0$ y P un punto cualquiera de ella. La recta perpendicular a $\overline{OP}$ (O es el vértice de la parábola) por el punto P intersecta al eje OX en el punto B y la proyección vertical de P sobre el eje OX es el punto A .

Demuestre que la longitud del trazo $\overline{AB}$ es constante e indique su valor.

Solución:

Sea $P(x_0, y_0)$ punto cualquiera de la parábola.

La pendiente de $\overline{OP}$ será $m_{OP} = \frac{y_0}{x_0}$.

Entonces la recta perpendicular a OP por $P(x_0, y_0)$ será

$$L : y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \text{ y eje } OX : y = 0$$

Luego la intersección de L con OX sería $B\left(\frac{y_0^2}{x_0} + x_0, 0\right)$. (3.0 puntos).

La proyección vertical del P sobre el eje OX será $A(x_0, 0)$.

Así el trazo $\overline{AB} = x_B - x_A = (\frac{y_0^2}{x_0} + x_0) - x_0 = \frac{y_0^2}{x_0}$ (1.5 puntos).

Pero $P(x_0, y_0)$ es punto de la parábola, de donde $y_0^2 = 4px_0$.

Sigue que $\overline{AB} = \frac{4px_0}{x_0} = 4p$.

Entonces el trazo $\overline{AB}$ es de magnitud constante y mide $4p$. (1.5 puntos)

P3. Un triángulo ABC isósceles con $\overline{AB} = \overline{CB}$ varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el punto $A(-a, 0)$, su vértice B se mueve sobre el eje OY y el lado $\overline{CB}$ es horizontal.

Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el vértice C e identifíquelo, determinando, si corresponde, focos, directrices y excentricidad.

Solución:

Podemos suponer que las coordenadas del vértice C que recorre el lugar geométrico son $C(\alpha, \beta)$.

Como el lado $\overline{CB}$ es horizontal y B pertenece al eje OY

$$\Rightarrow \overline{CB} = \alpha \text{ y } B(0, \beta).$$

(1.5 puntos)

Para la magnitud del lado $\overline{AB}$, $A(-a, 0)$ y $B(0, \beta)$.

Así $\overline{AB} = \sqrt{\beta^2 + a^2}$.

Pero el triángulo es isósceles con $\overline{AB} = \overline{BC}$

Sigue que $\sqrt{\beta^2 + a^2} = \alpha \Rightarrow \beta^2 + a^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = a^2$ y generalizando, el lugar geométrico es $x^2 - y^2 = a^2$ (3.0 puntos)

Se trata de una hipérbola de semiejes iguales (o equilátera) de magnitud a .

■ **excentricidad:** $e = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$

■ **directrices:** $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$

■ **focos:** $(\pm ae, 0) = (\pm a\sqrt{2}, 0)$

(1.5 puntos)

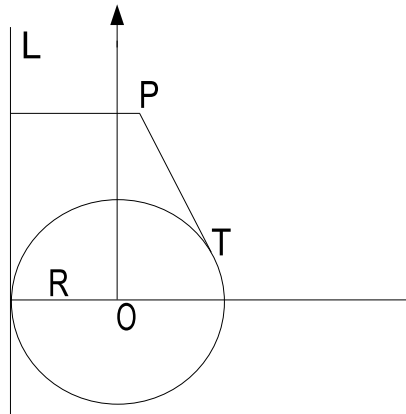


Control 2

P1. (6.0 pts.) Determinar las ecuaciones de las circunferencias que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente:

- (a) Su centro se encuentra en la recta $L : 2x - y - 3 = 0$.
- (b) Son tangentes al eje OX .
- (c) Pasan por el punto $P(0, -1)$

P2. (6.0 pts.) Dada la circunferencia $C : x^2 + y^2 = R^2$ y la recta $L : x = -R$, se pide determinar el Lugar Geométrico de los puntos P del plano, tales que la distancia de P a la recta L es igual a 2 veces la magnitud del trazo $\overline{PT}$, tangente desde P a la circunferencia C (ver figura)



Identifique el Lugar Geométrico resultante, indicando, si corresponde, centro, focos, semiejes, directrices, asíntotas y excentricidad.

INDICACION: Notar que el triángulo POT es rectángulo.

Tiempo: 1.15 horas.



Pauta Control 2

- P1.** Sea $C(a, b)$ centro de la circunferencia y r su radio. La ecuación de la circunferencia es:
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Según la condición (b), la circunferencia es tangente a OX , por lo tanto $r = |b|$.
 La ecuación queda: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$ (1.0 pto.)
 Además por condición (a), $(a, b) \in L : 2x - y - 3 = 0$, entonces
 $2a - b - 3 = 0$ y en consecuencia, $b = 2a - 3$ (1)
 También, por condición (c) $P(0, -1) \in \odot$, es decir $1 + 2b + a^2 = 0$. (2) (1.0 pto.)
 Reemplazando (1) en (2) se tiene $a^2 + 4a - 5 = 0$ y resolviendo, $a_1 = 1$, $a_2 = -5$ (1.0 pto.)
 de donde, en (1), $b_1 = -1$ y $b_2 = -13$ y por lo tanto,
 los radios ($r > 0$) $r_1 = |-1| = 1$ y $r_2 = |-13| = 13$ (1.0 pto.)
 Sigue que las circunferencias solución son:
 $\odot_1 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ Centro $C(1, -1) : r = 1$ (0.5 pto.)
 $\odot_2 : (x+5)^2 + (y+13)^2 = 13^2$ Centro $C(-5, -13) : r = 13$ (0.5 pto.)
- P2.** Sea $P(x, y)$ punto del Lugar Geométrico. La condición que cumplen los puntos del L.G. es $\overline{PL} = 2\overline{PT}$,
 donde $\overline{PL} = |x+R|$ y $\overline{PT}$ es cateto del $\triangle PTO$ rectángulo en T , de donde $\overline{PO}^2 = \overline{PT}^2 + R^2$ ($\overline{OT} = R$).
 Sigue que $\overline{PT} = \sqrt{\overline{PO}^2 - R^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$. (2.0 pto.)
 Entonces $\overline{PL} = 2\overline{PT}$ es equivalente a $|x+R| = 2\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$
 Elevando al cuadrado queda
 $3x^2 - 2Rx + 4y^2 = 5R^2$ y completando cuadrados queda
 $3(x - \frac{R}{3})^2 + 4y^2 = \frac{16}{3}R^2$, que reordenando se puede escribir:
 $\frac{(x - \frac{R}{3})^2}{(\frac{4}{3}R)^2} + \frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}}R)^2} = 1$. (2.0 pto.)
 El Lugar Geométrico es una elipse centrada en $C(\frac{R}{3}, 0)$ de semi ejes $a = \frac{4}{3}R$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ ($a > b$)
 exentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\frac{16}{9}R^2 - \frac{4}{3}R^2}}{\frac{4}{3}R} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{1}{2}$ ($e < 1$) (1.0 pto.)
 Focos $F(\frac{R}{3} + ae, 0) = F(\frac{R}{3} + \frac{2R}{3}, 0) = F(R, 0)$
 $F'(\frac{R}{3} - ae, 0) = F'(\frac{R}{3} - \frac{2R}{3}, 0) = F'(-\frac{R}{3}, 0)$ (0.5 pto.)
 Directrices:
 $(D) : x = \frac{R}{3} + \frac{a}{e} = \frac{R}{3} + \frac{8R}{3} = 3R; \quad (D) : x = 3R$
 $(D') : x = \frac{R}{3} - \frac{a}{e} = \frac{R}{3} - \frac{8R}{3} = -\frac{7}{3}R; \quad (D') : x = -\frac{7}{3}R$ (0.5 pto.)

Control 2, MA-1001 Introducción al cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2011/1 (9 de Abril)

Nota: El control tiene dos problemas independientes. Cada uno se califica con nota entre 1.0 y 7.0, redondeada a un decimal, que se obtiene por la fórmula $N = 1.0 + P$, donde P es el puntaje obtenido en cada problema. Algunas partes tienen su puntaje indicado en paréntesis.

Problema 1

Un punto $P = (x_0, y_0)$ se mueve sobre la parábola de ecuación $x^2 = 4y + 4$ de modo que $x_0 \neq 0$. Si $A = (0, 2)$ y $Q = (x_0, 0)$ es la proyección de P sobre el eje OX , demuestre que las rectas L_{OP} (que pasa por el origen O y P) y L_{AQ} (que pasa por A y Q) se intersectan en un punto R cuya distancia al origen es constante (independiente de x_0 e y_0).

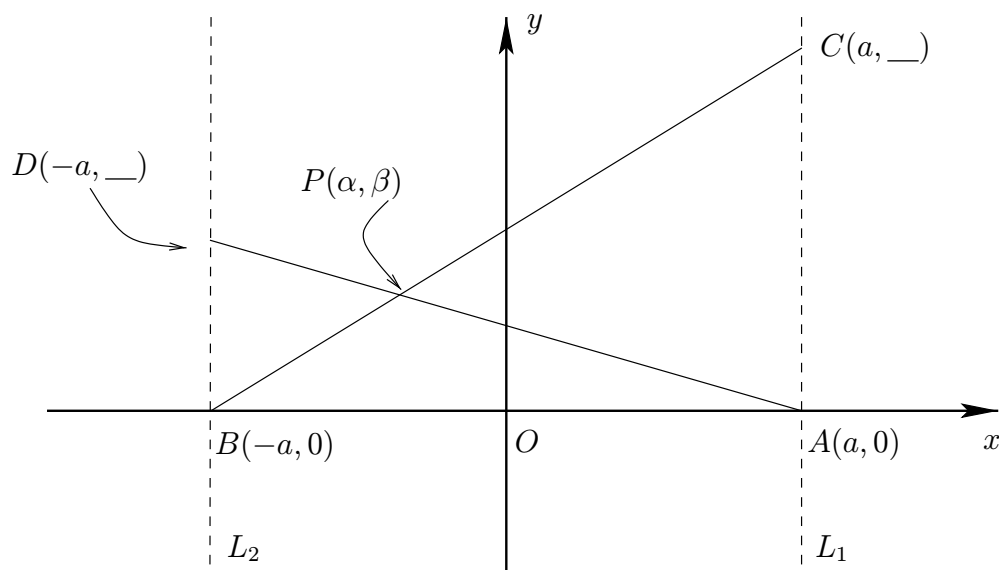
- Indicaciones:*
- Comience por escribir correctamente las ecuaciones de las rectas L_{OP} y L_{AQ} en términos de x_0 e y_0 y ya tendrá 2.5 ptos. de los 6 del problema.
 - Tenga cuidado con eventuales denominadores nulos (± 0.5 ptos).

Problema 2

Considere las rectas verticales $L_1 : x = a$ y $L_2 : x = -a$, y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$, donde $a > 0$ (ver figura).

Se pide:

- (1.0 pto) Determine el conjunto $\mathcal{M}$ de todos los puntos $P = (\alpha, \beta)$ del plano, tales que las rectas L_{BP} y L_{AP} están bien definidas e intersectan a las dos verticales L_1 y L_2 .
- (2.0 ptos) Para cada punto P de $\mathcal{M}$ encuentre, en términos de α y β (y del dato a), las coordenadas de los puntos C y D de la figura, que se encuentra en las intersecciones $L_1 \cap L_{BP}$ y $L_2 \cap L_{AP}$ respectivamente.
- (3.0 ptos) Encuentre el Lugar Geométrico de los puntos P de $\mathcal{M}$, tales que los trazos OC y OD sean perpendiculares entre sí. Identifique el lugar geométrico encontrado, indicando sus parámetros más relevantes (centro, radio, excentricidad, etc., según corresponda) (1.0 pto.).



Control 2, MA-1001 Introducción al cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2011/1 (9 de Abril)

Problema 1

Un punto $P = (x_0, y_0)$ se mueve sobre la parábola de ecuación $x^2 = 4y + 4$ de modo que $x_0 \neq 0$. Si $A = (0, 2)$ y $Q = (x_0, 0)$ es la proyección de P sobre el eje OX , demuestre que las rectas L_{OP} (que pasa por el origen O y P) y L_{AQ} (que pasa por A y Q) se intersectan en un punto R cuya distancia al origen es constante (independiente de x_0 e y_0).

- Indicaciones:*
- Comience por escribir correctamente las ecuaciones de las rectas L_{OP} y L_{AQ} en términos de x_0 e y_0 y ya tendrá 2.5 pts. de los 6 del problema.
 - Tenga cuidado con eventuales denominadores nulos (± 0.5 pts).

Solución

La recta L_{OP} tiene pendiente $m_{OP} = \frac{y_0}{x_0}$, por lo tanto la ecuación de dicha recta es:

$$L_{OP}: y = \frac{y_0}{x_0}x. \dots\dots\dots 1.0 \text{ pts.}$$

La recta L_{AQ} tiene pendiente $m_{AQ} = -\frac{2}{x_0}$ y como pasa por $A(0, 2)$, tiene ecuación

$$L_{AQ}: y = 2 - \frac{2}{x_0}x. \dots\dots\dots 1.5 \text{ pts.}$$

Intersectando las rectas L_{OP} y L_{AQ} se obtienen las coordenadas del punto R . La abscisa de R satisface la ecuación

$$\frac{y_0}{x_0}x = 2 - \frac{2}{x_0}x$$

es decir vale

$$x_R = \frac{2x_0}{y_0 + 2}. \dots\dots\dots 1.0 \text{ pts.}$$

En este último cálculo debe notarse que el factor $y_0 + 2 \neq 0$ ya que el mínimo valor y en la parábola se encuentra en su vértice, donde $y = -1$. También puede argumentarse que si $y_0 = -2$ entonces debiera cumplirse $x_0^2 = -1$ lo cual es evidentemente falso. 0.5 pts.

Usando nuevamente la ecuación de la recta L_{OP} se encuentra la ordenada del punto R .

Así se deduce entonces que:

$$R = \left(\frac{2x_0}{y_0 + 2}, \frac{2y_0}{y_0 + 2} \right). \dots\dots\dots 0.5 \text{ pts.}$$

Para terminar la demostración calculamos la distancia de O a R . La primera fórmula que se obtiene (en términos de x_0 e y_0) es

$$d(O, R)^2 = \frac{4(x_0^2 + y_0^2)}{(y_0 + 2)^2}. \dots\dots\dots 0.5 \text{ pts.}$$

Sin embargo, desarrollando (por ejemplo el denominador) y usando el hecho que el punto P pertenece a la parábola, se obtiene una segunda fórmula:

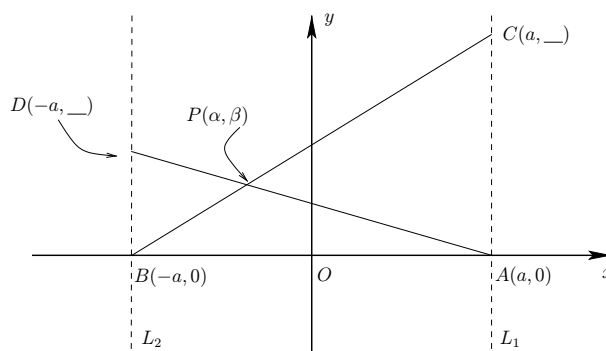
$$d(O, R)^2 = \frac{4(x_0^2 + y_0^2)}{\underbrace{4 + 4y_0}_{=x_0^2 (Ec. parábola)} + y_0^2} = 4. \dots\dots\dots 1.0 \text{ pts.}$$

Problema 2

Considere las rectas verticales $L_1 : x = a$ y $L_2 : x = -a$, y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$, donde $a > 0$ (ver figura).

Se pide:

- (1.0 pto) Determine el conjunto $\mathcal{M}$ de todos los puntos $P = (\alpha, \beta)$ del plano, tales que las rectas L_{BP} y L_{AP} están bien definidas e intersectan a las dos verticales L_1 y L_2 .
- (2.0 ptos) Para cada punto P de $\mathcal{M}$ encuentre, en términos de α y β (y del dato a), las coordenadas de los puntos C y D de la figura, que se encuentra en las intersecciones $L_1 \cap L_{BP}$ y $L_2 \cap L_{AP}$ respectivamente.
- (3.0 ptos) Encuentre el Lugar Geométrico de los puntos P de $\mathcal{M}$, tales que los trazos OC y OD sean perpendiculares entre sí. Identifique el lugar geométrico encontrado, indicando sus parámetros más relevantes (centro, radio, excentricidad, etc., según corresponda) (1.0 pto.).



Solución

Las rectas L_{AP} y L_{BP} están bien definidas si $P \neq A$ y $P \neq B$. Además dichas rectas intersectan a L_1 y L_2 en la medida de no ser verticales.

Por tal motivo:

$$\mathcal{M} = \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \neq a\}. \dots\dots\dots 1.0 \text{ ptos.}$$

Ecuación de la recta L_{BP} :

- Pendiente: $m_{BP} = \frac{\beta}{\alpha + a}$. $\dots\dots\dots 0.5 \text{ ptos.}$
- Ecuación: $y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a)$. $\dots\dots\dots 0.5 \text{ ptos.}$

Las coordenadas de C se obtienen reemplazando $x = a$ en la ecuación de la recta L_{BP} . Con esto:

$$C = \left(a, \frac{2a\beta}{\alpha + a}\right) \dots\dots\dots 0.5 \text{ ptos.}$$

Las coordenadas del punto D se obtiene en forma análoga, intercambiando los roles de a y $-a$. Por lo tanto, sin necesidad de rehacer los cálculos, se tiene que:

$$D = \left(-a, \frac{-2a\beta}{\alpha - a}\right) \dots\dots\dots 0.5 \text{ ptos.}$$

La condición de perpendicularidad se escribe diciendo que $m_{OC} \cdot m_{OD} = -1$. Es decir, la primera ecuación del L.G. es:

$$\frac{2\beta}{\alpha + a} \cdot \frac{2\beta}{\alpha - a} = -1. \dots\dots\dots 1.5 \text{ ptos.}$$

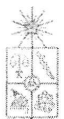
Reordenando esta ecuación, se obtiene que:

$$4\beta^2 = a^2 - \alpha^2$$

Es decir:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{(a/2)^2} = 1, \dots\dots\dots 0.5 \text{ ptos.}$$

que corresponde a una elipse de semiejes a y $a/2$, de excentricidad $e = \sqrt{3}/2$. $\dots\dots\dots 1.0 \text{ ptos.}$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 12-1

Control 2

- P1.** Sea $A = (-a, 0)$, $a > 0$ un punto fijo en el eje OX . Determinar el lugar geométrico de los puntos $P = (\alpha, \beta)$ del plano que satisfacen la siguiente condición:

La recta vertical por P y la recta perpendicular a PA por P cortan al eje OX en los puntos Q y S respectivamente, de tal modo que el largo del trazo $\overline{QS} = a$ (constante).

Identifique el lugar geométrico resultante indicando sus elementos principales (vértices, focos, directrices, si corresponde).

- P2.** Considere la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a > b > 0$ y sea L la recta tangente a la elipse en un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella. Sean Q y R los puntos de intersección de L con las rectas tangentes a la elipse en sus vértices (rectas verticales).

Demuestre que la circunferencia que tiene por diámetro el segmento $\overline{QR}$ pasa por los focos de la elipse.

Indicación: La ecuación de la tangente a la elipse en un punto $P = (x_0, y_0)$ de ella es

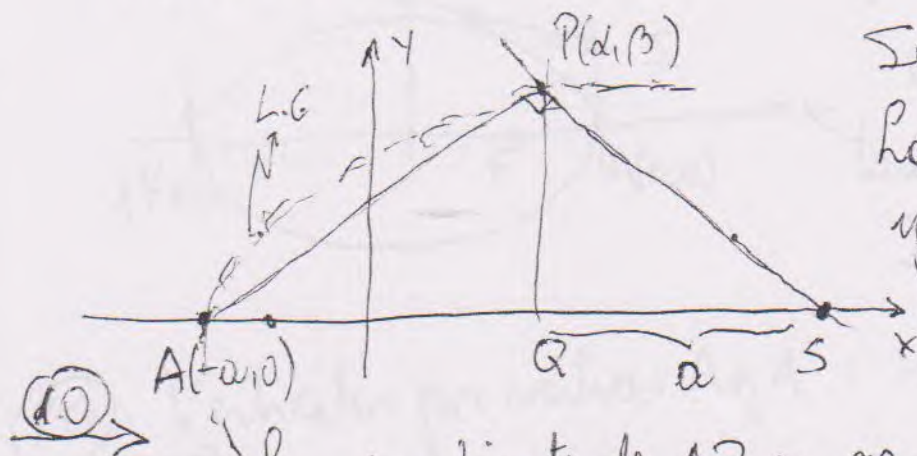
$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Cálculo (12-1)

Pauta Control 2

Problema 1



Sea $P(x, y)$ punto del L.G.

La vertical por P es: $x = x$
y pero $Q(x, 0)$ sobre Ox
 $x_Q = x$

1.0 → La pendiente de AP es $m_{AP} = \frac{y}{x+a}$ y la recta perpendicular a AP por P es $y - y = -\frac{x+a}{y}(x - x)$

2.0 → Para el punto $S = Ox \cap PS$ se tiene $y_S = 0, \Rightarrow x_S = \frac{y^2}{x+a} + x$
Entonces $QS = x_S - x_Q = a$ es la condición

$$\text{Ovi } \left(\frac{y^2}{x+a} + x \right) - x = a \Rightarrow y^2 = a(x+a)$$

Generalizando y por y y x por x el L.G. es:

2.0 → $y^2 = a(x+a)$

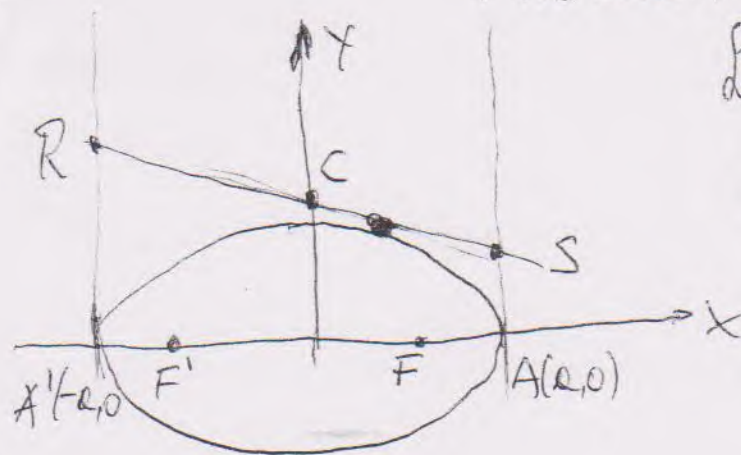
Se trata de una parábola de eje horizontal (eje Ox)

Vertice $V(-a, 0)$ $4p = a \Rightarrow p = \frac{1}{4}a$

Ovi, Foco $(-a+p, 0) = F(-a+\frac{1}{4}a, 0) = F(-\frac{3}{4}a, 0)$

1.0 → Directriz: $x = -a - p = -a - \frac{1}{4}a = -\frac{5}{4}a$

PROBLEMA 2



La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Los focos $F(ae, 0), F'(-ae, 0)$

con $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$

tangente por $P(x_0, y_0)$ de la elipse

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

(10) Verticales por vertices A y A' : $x=a$ y $x=-a$

Coordenadas para S : $x_S = a$ y en la tge $\frac{ax_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow y_S = \frac{b^2}{a} \frac{a-x_0}{y_0}, \text{ es } S(a, \frac{b^2}{a} \frac{a-x_0}{y_0})$$

(1.5) Análogamente para R : $x_R = -a$, $y_R = \frac{b^2}{a} \frac{a+x_0}{y_0}$ es $R(-a, \frac{b^2}{a} \frac{a+x_0}{y_0})$

Para la circunferencia de diámetro RS tiene:

$$\text{Centro } C: x_C = \frac{a-a}{2} = 0, y_C = \frac{1}{2} \left[\frac{b^2}{a} \frac{a-x_0}{y_0} + \frac{b^2}{a} \frac{a+x_0}{y_0} \right] = \frac{b^2}{y_0}$$

$$\text{es } C(0, \frac{b^2}{y_0})$$

$$(\text{Radio})^2 = \overline{CS}^2 = (a-0)^2 + \left[\frac{b^2}{a} \frac{a-x_0}{y_0} - \frac{b^2}{y_0} \right]^2 = a^2 + \left[\frac{b^2}{y_0} \left(\frac{a-x_0}{a} - 1 \right) \right]^2$$

$$\Rightarrow \overline{CS}^2 = a^2 + \frac{b^4 x_0^2}{a^2 y_0^2}$$

(1.5) Entonces la circunferencia es: $x^2 + \left(y - \frac{b^2}{y_0} \right)^2 = \overline{CS}^2 = a^2 + \frac{b^4 x_0^2}{a^2 y_0^2}$

Para la $\odot \cap \text{Eje } OX$ hacemos $y=0 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{b^4 x_0^2}{a^2 y_0^2} - \frac{b^4}{y_0^2}$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{b^4}{y_0^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1 \right) = a^2 + \frac{b^4(x_0^2 - a^2)}{a^2 y_0^2} \text{ por } P(x_0, y_0) \in \text{ELIPSE}$$

(2.0) entonces $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{b^4(x_0^2 - a^2)}{a^2 b^2 - b^2 x_0^2} = a^2 + \frac{b^4(x_0^2 - a^2)}{b^2(a^2 - x_0^2)} = a^2 - b^2$

$\therefore x = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \pm ae$ y lo $\odot$ pasa por los focos



Control 2

- P1.** (6,0 pts) Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b > 0$ y su punto superior $A(0, b)$. Por un punto P (con $x_P \neq 0$) que se mueve sobre la elipse, se traza la recta AP , la que corta al eje OX en Q .

Determine el lugar geométrico de la intersección de la recta OP (O es el origen) con la recta vertical que pasa por Q . Identifique el lugar geométrico resultante indicando sus elementos básicos.

- P2.** (6,0 pts) Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b > 0$. Demuestre que cualquier recta tangente a esta cónica determina sobre las asíntotas puntos A y B tales que $x_A \cdot x_B = \text{constante}$, e indique el valor de la constante (x_A y x_B son las abscisas de A y B respectivamente).

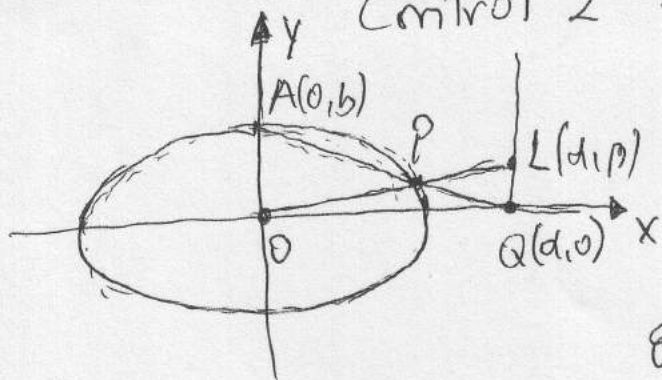
Indicación: La recta tangente a la hipérbola en un punto $P(x_0, y_0)$ de ella tiene por ecuación

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Justi que cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Cálculo (13-1)

Control 2 - Pauta Problema 1



$$\text{Elipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad A(0, b)$$

Sea $L(\alpha, \beta)$ α, β variables, punto del Lugar Geométrico

Entonces LQ es recta vertical y por lo

tanto $Q(a, 0)$

(10) $\rightarrow$ Las rectas OL y AQ se cortan en P , punto que debe estar en la Elipse. (Existen otras formas de Resolver)

Donc Recta OL : $y = \frac{\beta}{\alpha} x$

Recta AQ : $y = -\frac{b}{a}(x-a) = -\frac{b}{a}x + b$

Resolviendo el sistema $\frac{\beta}{a}x = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow x_p = \frac{b}{\beta + b}$

(2.0) $\Rightarrow x_p = \frac{b\alpha}{\beta + b} \wedge y_p = \frac{\beta}{a}x_p = \frac{b\beta}{\beta + b}$

Ahora $P(x_p, y_p) \in \text{Elipse} \Rightarrow \frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{b^2 \alpha^2}{a^2 (\beta + b)^2} + \frac{b^2 \beta^2}{b^2 (\beta + b)^2} = 1 \Rightarrow b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 = a^2 (\beta + b)^2$$

$$\Rightarrow b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 = a^2 \beta^2 + 2a^2 b \beta + a^2 b^2$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{b^2 \alpha^2}{2a^2 b} - \frac{a^2 b^2}{2a^2 b} \Rightarrow \beta = \frac{b}{2a^2} \alpha^2 - \frac{b}{2}$$

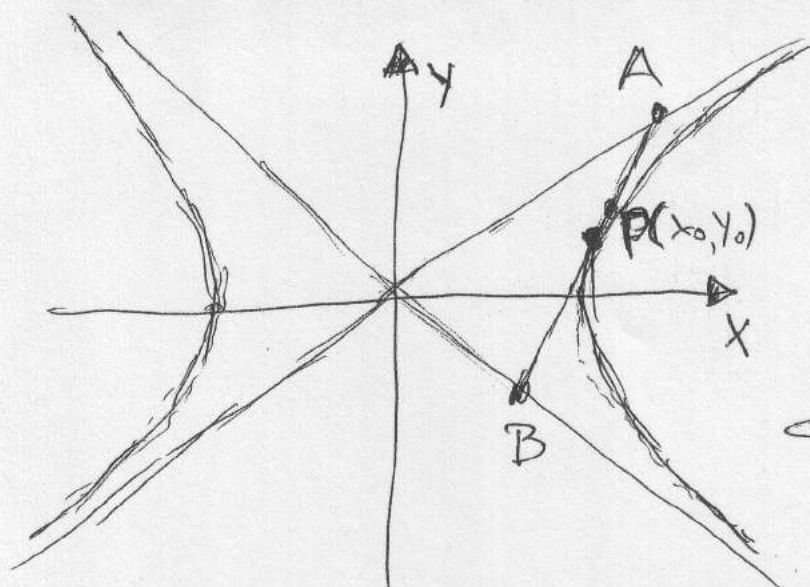
(2.0) $\rightarrow$ y generalizando en términos de x e y : $y = \frac{b}{2a^2} x^2 - \frac{b}{2}$

Es una PARÁBOLA de parámetro $p = \frac{1}{4 \cdot \frac{b}{2a^2}} = \frac{a^2}{2b}$ y Vértice $V(0, -\frac{b}{2})$

Siempre que Foco $F(0, -\frac{b}{2} + \frac{a^2}{2b}) = F(0, \frac{a^2 - b^2}{2b})$

(10) $\rightarrow$ La directriz (D): $y = -\frac{b}{2} - \frac{a^2}{2b} = -\frac{a^2 + b^2}{2b}$

Peuta Problema 2



La Hipérbolo es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y sus}$$

$$\text{asintotas } y = \pm \frac{b}{a} x$$

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la hipérbolo.

La tangente en P a la hipérbolo es, según indicación,

(1.0)

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Su intersección con la asíntota $y = \frac{b}{a} x$ no da $A(x_A, y_A)$

(1.5)

$$\text{Entonces } \frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{b}{a} \frac{x_A y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x_A = \frac{1}{\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{ab}} = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$$

Análogamente la intersección con la asíntota $y = -\frac{b}{a} x$ no da

(1.5)

$$B(x_B, y_B) \text{ de donde } \frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{b}{a} \frac{x_B y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x_B = \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}$$

$$\text{Siguiendo que } x_A \cdot x_B = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \cdot \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} = \frac{a^2}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}$$

$$\text{y como } P(x_0, y_0) \in \text{Hipérbolo} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Así } x_A \cdot x_B = \frac{a^2}{1} = a^2$$

(2.0)

La constante es a^2



Control 2

- P1.** (6,0 ptos.) Un punto A se mueve sobre la parábola de ecuación $x^2 = 4py$ de foco $F = (0, p)$ y vértice $O = (0, 0)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $P = (\alpha, \beta)$ que satisfacen la siguiente condición:

"El punto A , intersección de la recta $\overline{OP}$ con la parábola, y el punto B , intersección de la recta $\overline{FP}$ y el eje OX , tienen la misma abscisa."

- P2.** (i) (3,0 ptos.) Por un punto P ubicado sobre la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se traza una recta horizontal que corta a las asíntotas de la hipérbola en los puntos A y B . Demuestre que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = a^2$.
- (ii) (3,0 ptos.) Dada una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y una recta $y = mx + k$, se sabe que éstas son tangentes si y sólo si se verifica la relación:

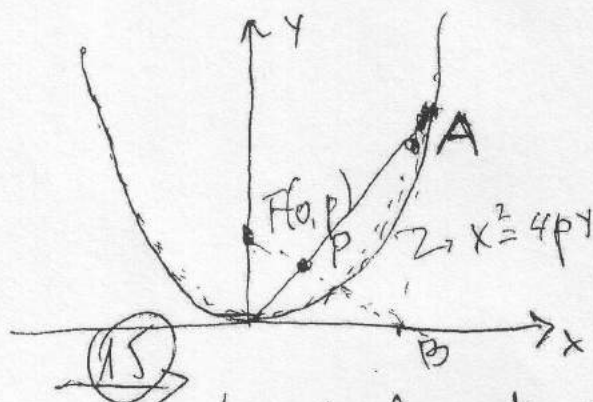
$$k^2 = m^2 a^2 + b^2.$$

Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P = (\alpha, \beta)$ tales que las dos rectas tangentes a la elipse que pasan por P son perpendiculares.

Consultas sólo al auxiliar de control
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Cálculo - Control 2

Punto Problems 1



Sea $P(\alpha, \beta)$ punto del L.G.

Recta OP: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$

Intersección OP con la parábola en

$$x^2 = 4p\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) \Rightarrow x_A = \frac{4p\beta}{\alpha} \quad x \neq 0$$

Además la recta FP será: $y - p = \frac{\beta - p}{\alpha}x$ y su intersección con eje OX será (para $x=0$) $x_B = \frac{p\alpha}{p-\beta}$ (15)

La condición es Abscisas iguales $x_A = x_B$

$$\Rightarrow \frac{4p\beta}{\alpha} = \frac{p\alpha}{p-\beta} \Rightarrow 4p\beta - 4\beta^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 4\beta^2 - 4p\beta + \alpha^2 = 0 \Rightarrow 4\left(\beta^2 - p\beta\right) + \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4\left(\beta - \frac{p}{2}\right)^2 - 4\frac{p^2}{4} + \alpha^2 = 0 \Rightarrow 4\left(\beta - \frac{p}{2}\right)^2 + \alpha^2 = p^2$$

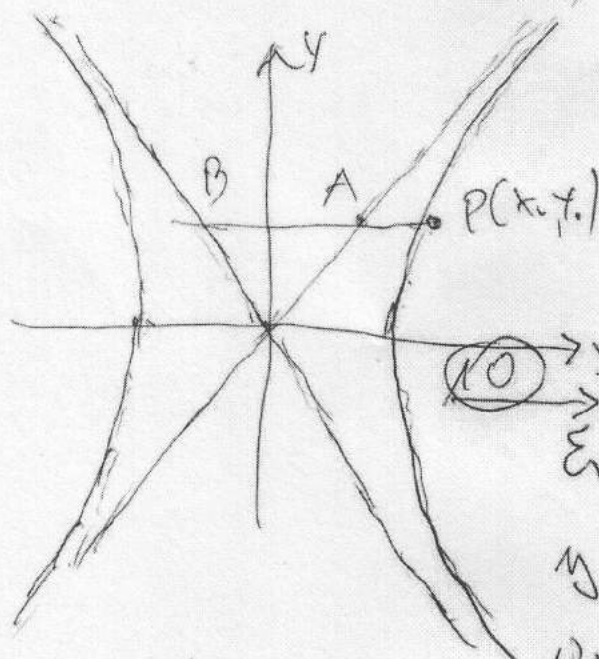
En el L.G es $\frac{\left(\beta - \frac{p}{2}\right)^2}{\left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{\alpha^2}{p^2} = 1$, o bien, recuperando las variables generales

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{\left(y - \frac{p}{2}\right)^2}{\left(\frac{p}{2}\right)^2} = 1$$

(10) Es una elipse centrada en $(p, p/2)$ y semiejes p y $p/2$.

Punto Problem 2

i) Sea $P(x_0, y_0)$ punto de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a}x$ y la horizontal por P: $y = y_0$

Coordenadas de A: $\cap \begin{cases} y = y_0 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \Rightarrow A(\frac{ay_0}{b}, y_0)$

Coordenadas de B: $\cap \begin{cases} y = y_0 \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \Rightarrow B(-\frac{ay_0}{b}, y_0)$

Entonces $\overline{PA} = x_P - x_A = x_0 - \frac{ay_0}{b}$

y $\overline{PB} = x_P - x_B = x_0 + \frac{ay_0}{b}$

Así $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (x_0 - \frac{ay_0}{b})(x_0 + \frac{ay_0}{b})$

(1.0) $\Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}{b^2}$ y como $P(x_0, y_0) \in H$; por lo tanto

$b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ de donde $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{a^2 b^2}{b^2} = a^2$ (1.0)

ii) La recta tangente tiene ecuación $y = mx + k$ y debe contener a $P(\alpha, \beta)$ punto del lugar geométrico.

(0.5) Así $\beta = m\alpha + k$ y se tiene la relación $k^2 = m^2 a^2 + b^2$ *

Así, reemplazando $k = \beta - m\alpha$ en la relación * tendremos una ecuación de 2° grado en m de donde se conocen los puntos

(1.0) Orígenes de las rectas por $P(\alpha, \beta)$ y tangentes a la Elipse

Segue que $(\beta - m\alpha)^2 = m^2 a^2 + b^2 \Leftrightarrow \beta^2 + m^2 \alpha^2 - 2m\alpha\beta = m^2 a^2 + b^2$

(0.5) $\Leftrightarrow m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\alpha\beta + \beta^2 - b^2 = 0$

Recordar que en $px^2 + qx + r = 0$ (2° grado) $x_1 \cdot x_2 = \frac{r}{p}$.

En este caso $m_1, m_2 = \frac{\beta^2 - b^2}{\alpha^2 - a^2}$ (no es necesario resolver la ecuación)

(1.0) Como las rectas se perpendiculares m_1 y m_2 deben ser $\perp$, $m_1 \cdot m_2 = -1$

Así queda $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$ El L.G. es una $\odot$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Control 2

P1. (6 pts.)

Considere las rectas $L_1 : x = A$, $L_2 : y = B$ y el punto $F(f, B)$ sobre la recta L_2 , donde $f > A$. Si F' es el simétrico de F con respecto a la recta L_1 , encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son F y F' y cuyo semieje mayor mide a , donde $a > f - A$.

Indique cuánto vale la excentricidad de la elipse y encuentre las ecuaciones de sus directrices.

P2. (6 pts.)

Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P(\alpha, \beta)$ tales que la recta L_1 , perpendicular a OP por el origen, y la recta L_2 que pasa por P y el punto $A(a, 0)$, con $a > 0$ se cortan en un punto que se mueve sobre la cónica $y^2 = ax$. Identifique el lugar geométrico obtenido indicando todas las propiedades que correspondan (focos, directrices, excentricidad, radio, pendiente, etc.) Ver gráfico:

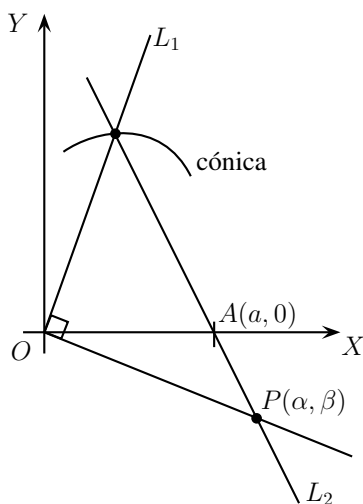


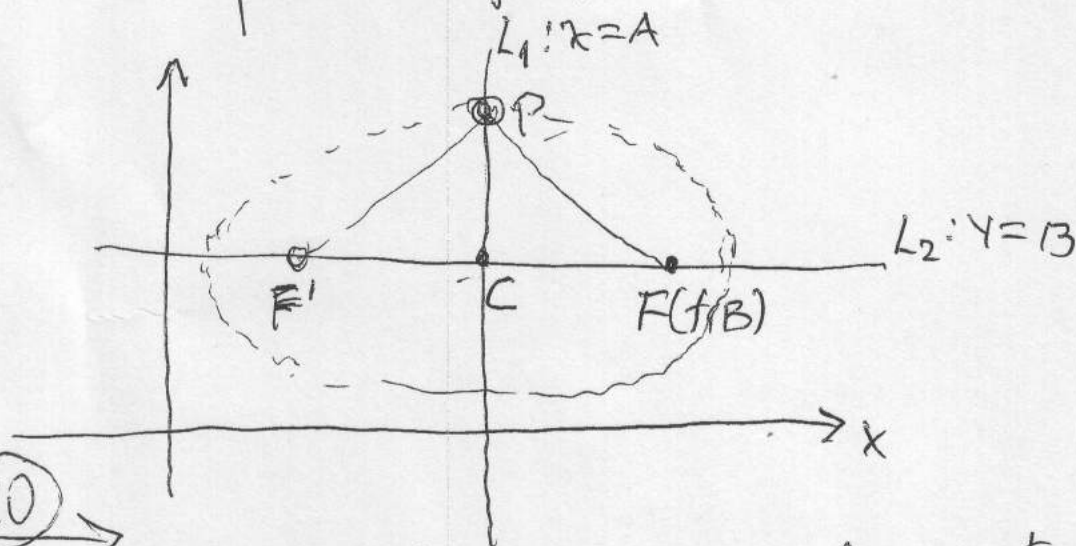
Figura 1:

Tiempo: 1 hora 15 minutos.

Introducción al Cálculo MA1001

Control 2 Parte Problemas 1

Interpretando gráficamente el enunciado queda



(10) → Claramente el centro C de la elipse está en $L_1 \cap L_2$, de

(10) → modo que $C(A, B)$

Entonces F' es simétrico de F con respecto a C , así

$$\frac{x_F + x_{F'}}{2} = x_C \Rightarrow x_F + x_{F'} = 2A \Rightarrow x_{F'} = 2A - f$$

También se sabe que para el punto P , vértice del eje menor de la elipse se tiene $PF' + PF = 2a \wedge PF' = PF$

(20) → Entonces $PF = a$ y $CF = x_F - x_C = f - A$

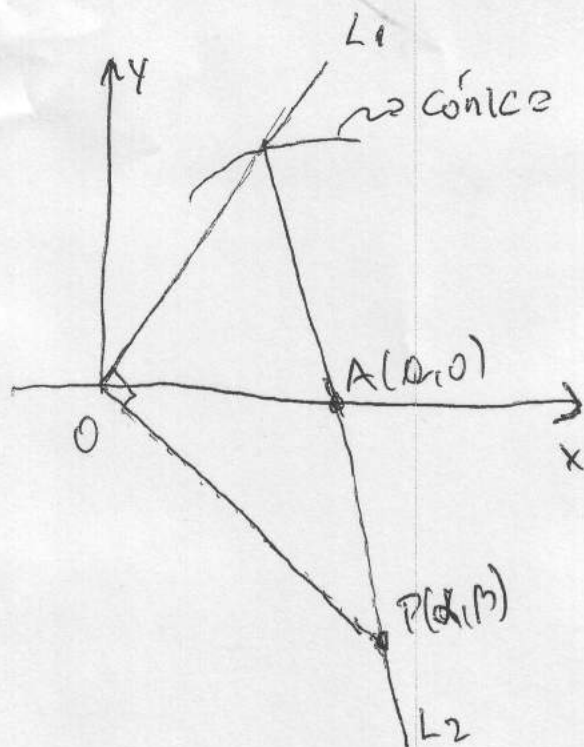
→ Sigue que $PC = \text{semieje menor} = \sqrt{PF^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - (f-A)^2}$

(40) → Así, la elipse queda $\frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(y-B)^2}{a^2 - (f-A)^2} = 1$

(25) → La excentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2 - (a^2 - (f-A)^2)}}{a} = \frac{f-A}{a} < 1$

(25) → y las directrices $x = A \pm \frac{a}{e} = A \pm \frac{a}{f-A}$

Punto Problema 2



Sea $P(\alpha, \beta)$ punto del L.G.

Entonces la pendiente de OP es

$$m_{OP} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ de donde como } L_1 \perp OP$$

$$\Rightarrow m_{L_1} = -\frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow (0.5)$$

$$\text{Sigue que } L_1: y = -\frac{\alpha}{\beta}x$$

Por otro lado $L_2 = L_{P-A}$, entonces

$$L_2: y = \frac{\beta}{\alpha-a}(x-a) \longrightarrow (0.5)$$

$$\text{Así } L_1 \cap L_2 \in \text{Cónica} \wedge L_1 \cap L_2 \rightarrow \begin{cases} y = \frac{\beta}{\alpha-a}(x-a) \\ y = -\frac{\alpha}{\beta}x \end{cases}$$

$$\text{Resolviendo } \frac{\beta}{\alpha-a}(x-a) = -\frac{\alpha}{\beta}x \Rightarrow x\left(\frac{\beta}{\alpha-a} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{a\beta}{\alpha-a}$$

$$\Rightarrow x \frac{\beta^2 + \alpha(\alpha-a)}{\beta(\alpha-a)} = \frac{a\beta}{\alpha-a} \Rightarrow x_n = \frac{a\beta^2}{\beta^2 + \alpha(\alpha-a)} \wedge y_n = -\frac{\alpha}{\beta}x_n$$

$$\text{donde } (x_n, y_n) \text{ es el punto de } L_1 \cap L_2 \longrightarrow (2.0)$$

$$\text{Por último } (x_n, y_n) \in \text{Cónica} \Rightarrow y_n^2 = ax_n \text{ de donde.}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} x_n^2 = ax_n \Rightarrow \alpha^2 x_n = a\beta^2 \Rightarrow \alpha^2 \frac{a\beta^2}{\beta^2 + \alpha(\alpha-a)} = a\beta^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \alpha^2 - a\alpha. \text{ Sigue que } \beta^2 = a\alpha \text{ y generalizando}$$

$$\text{el L.G. es } y^2 = ax. \longrightarrow (2.0)$$

Es una parábola de eje horizontal, vértice $(0, 0)$, Foco $(\frac{a}{4}, 0)$

$$\text{y directriz } x = -\frac{a}{4} \text{ (excentricidad } e=1) \longrightarrow (2.0)$$

Control 2

P1. (6 ptos.)

Considere los puntos $A(0, 0)$ y $B(a, 0)$ con $a > 0$.

Determine e identifique el lugar geométrico de los puntos $C(\alpha, \beta)$, con $\beta > 0$, del plano que cumplen la siguiente condición: Si d_1 es la distancia de B al punto medio del trazo AC y d_2 es la distancia de A al punto medio del trazo BC , entonces $d_1^2 + d_2^2 = 5\Delta$, donde Δ es el área del triángulo ABC .

P2. Considere la parábola $y^2 = 4px$, $p > 0$, foco F y directriz D .

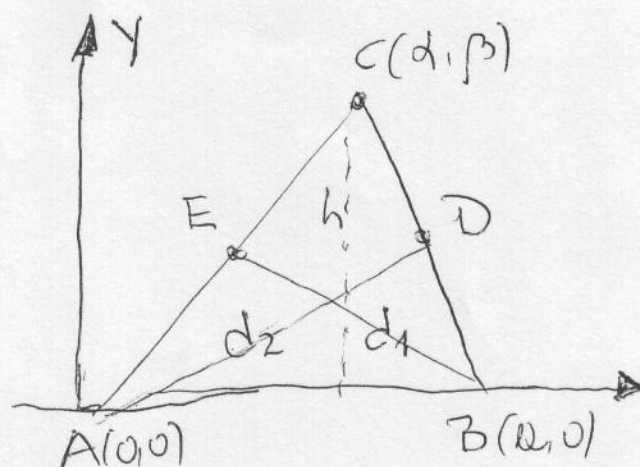
Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola con $y_0 \neq 0$. Por P se traza la recta horizontal que corta a la directriz de la parábola en el punto Q . Por Q se traza la recta paralela al trazo FP , la que corta al eje OX en el punto R .

- (2 ptos.) Encuentre las coordenadas de los puntos Q y R en términos de x_0 e y_0 .
- (3 ptos.) Si B es el punto donde $L_{R,P}$, recta que pasa por los puntos R y P , corta al eje OY pruebe que los trazos FB y RP son perpendiculares.
- (1pto.) Demuestre que los puntos Q, B y F son colineales.

Tiempo: 1:15 horas.

Introducción al Cálculo - Control 2

Punto Problema 1



$D =$ punto medio de BC , $D\left(\frac{\alpha+a}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

$E =$ punto medio de AC , $E\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

$$d_1 = \overline{BE} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - a\right)^2 + \frac{\beta^2}{4}}$$

$$d_2 = \overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{\alpha+a}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4}}$$

(2.0) $\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} h \cdot AB = \frac{1}{2} a\beta$

Segue que $d_1^2 + d_2^2 = 5 \text{Area } \triangle ABC \Rightarrow$

$$\left(\frac{\alpha}{2} - a\right)^2 + \frac{\beta^2}{4} + \left(\frac{\alpha+a}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4} = \frac{5}{2} a\beta, \text{ agrupando}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} + a^2 - a\alpha + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a\alpha}{2} + \frac{\beta^2}{4} - \frac{5}{2} a\beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} a\alpha - \frac{5}{2} a\beta + \frac{5}{4} a^2 = 0 \quad / \cdot 2$$

que se $\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha - 5a\beta + \frac{5}{2} a^2 = 0$ y en las

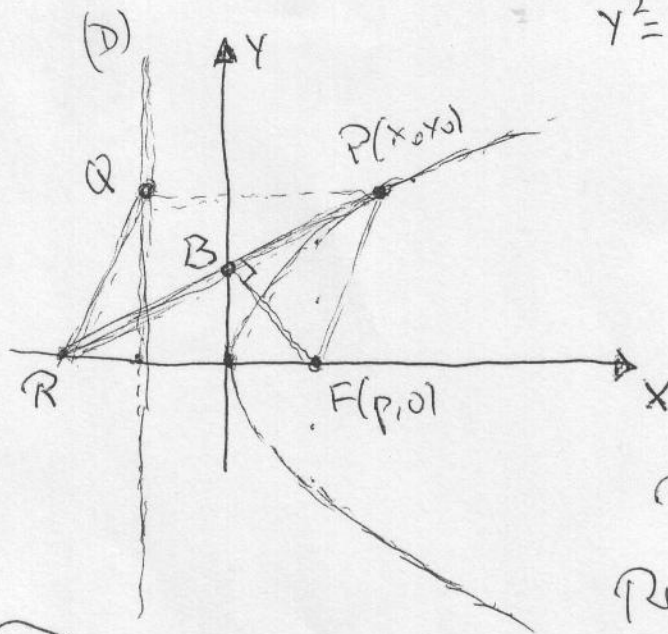
(2.0) Coordenadas generales es $x^2 + y^2 - ax - 5ay + \frac{5}{2} a^2 = 0$

Se trata de una circunferencia Centro $\left(\frac{a}{2}, \frac{5a}{2}\right)$ y

$$\text{radio } R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{25a^2}{4} - \frac{5}{2} a^2} = \sqrt{\frac{26a^2}{4} - \frac{10a^2}{4}} = \sqrt{\frac{16a^2}{4}} = 2a$$

(2.0) En $\odot$ (Centro $\left(\frac{a}{2}, \frac{5a}{2}\right)$, $R=2a$)

Punto Problema 2



$$y^2 = 4px, p > 0 \quad F(p, 0) \quad P(x_0, y_0) \quad y_0 \neq 0$$

$$(D): x = -p$$

a) Coordenadas de los puntos Q y R
La recta PQ es horizontal, en
 $y_Q = y_P = y_0$ y $x_Q = x_{\text{directriz}} = -p$

Segue que $Q(-p, y_0)$

Para R: Pendiente de PF = $\frac{y_0}{x_0 - p}$

Recta por Q paralela a PF.

(1.5) →

$$y - y_0 = m_{PF}(x + p) = \frac{y_0}{x_0 - p}(x + p)$$

La intersección con el eje OX con $y_R = 0 \Rightarrow -y_0 = \frac{y_0}{x_0 - p}(x_R + p)$

(0.5) $\Rightarrow -x_0 + p = x_R + p \Rightarrow x_R = -x_0$. Así $R(-x_0, 0)$

b) Recta por R y P: $y = m_{PR}(x + x_0)$ con $m_{PR} = \frac{y_0}{2x_0}$

$\Rightarrow L_{PR}: y = \frac{y_0}{2x_0}(x + x_0)$. Para $L_{PR} \cap OY$, sea $x_B = 0$

(1.0) $\Rightarrow y_B = \frac{y_0}{2x_0}(0 + x_0) = \frac{y_0}{2}$. Así $B(0, \frac{y_0}{2})$

Entonces $m_{FB} = \frac{y_0/2 - 0}{0 - p} = -\frac{y_0}{2p}$. Segue que $m_{FB} \cdot m_{PR} = \frac{y_0}{2x_0} \cdot \frac{y_0}{2p}$

$\Rightarrow m_{FB} \cdot m_{PR} = -\frac{y_0^2}{4px_0}$ y como $P(x_0, y_0) \in \text{Parabola}$ $y_0^2 = 4px_0$

(2.0) $\Rightarrow$ Así $m_{FB} \cdot m_{PR} = -\frac{4px_0}{4px_0} = -1 \Rightarrow$ Rectas FB y PR son $\perp$

c) Los puntos Q, B, F serán colineales si, por ejemplo, la recta por Q y B, contiene al punto F. En efecto $L_{QB}: y - \frac{y_0}{2} = \frac{y_0/2}{-p}x$

(1.0) $\Rightarrow$ y $F(p, 0)$ cumple con $0 - \frac{y_0}{2} = -\frac{y_0/2}{p} \cdot p \Leftrightarrow -\frac{y_0}{2} = -\frac{y_0}{2} \Leftrightarrow V$ es decir $F \in L_{QB} \Rightarrow Q, B, F$ son colineales

Control 2

P1. (6 ptos.)

Hallar el punto Q , simétrico del punto $P(-2, 6)$ con respecto a la recta de ecuación: $L : 5x - 2y - 7 = 0$.

P2. (6 ptos.)

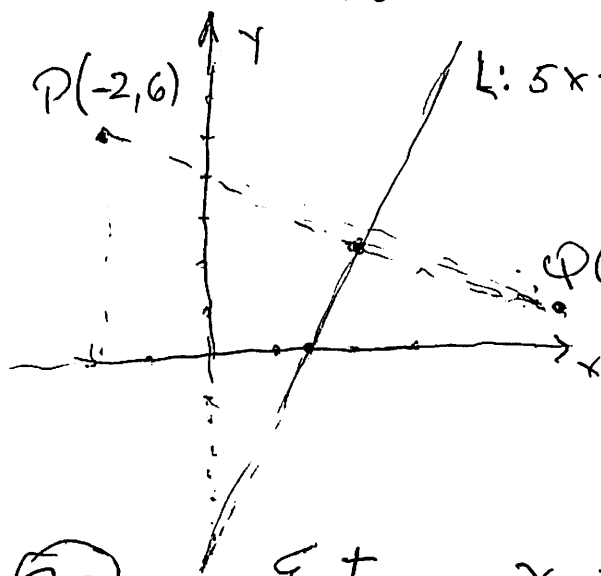
Un punto $P(x_0, y_0)$ del plano se mueve de modo que el producto de las pendientes de las rectas que unen P con los puntos $A(1, -3)$ y $B(3, -3)$ es constante e igual a 4.

Encontrar e identificar el Lugar Geométrico que describe P , señalando los elementos principales de dicho lugar geométrico.

Tiempo: 1:15 horas.

Introducción al Cálculo (MA1001)

Control 2 Parte Problema 1



$$L: 5x - 2y - 7 = 0 \text{ o bien } 5x - 2y = 7 \quad m_L = \frac{5}{2}$$

Sea $Q(x_0, y_0)$ el punto solución

En primer lugar es necesario imponer que el punto medio M del trazo PQ debe estar en la recta L .

(2.0) → Entonces $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{-2 + x_0}{2}$; $y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{6 + y_0}{2}$

$$\text{y } M \in L \Rightarrow 5 \frac{-2 + x_0}{2} - 2 \frac{6 + y_0}{2} = 7 \Rightarrow -10 + 5x_0 - 12 - 2y_0 = 14$$

(1.0) → $\Rightarrow \boxed{5x_0 - 2y_0 = 36} \quad (1)$

También debe cumplirse que $\overline{PQ} \perp L$, es decir, L es simétrico del trazo PQ : Así $m_{PQ} \cdot m_L = -1$

$$\text{Entonces } m_{PQ} = \frac{y_0 - 6}{x_0 + 2} \cdot \frac{5}{2} = -1 \Rightarrow 5y_0 - 30 = -2x_0 - 4$$

(2.0) → $\Rightarrow \boxed{2x_0 + 5y_0 = 26} \quad (2)$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$\begin{array}{l|l} 5x_0 - 2y_0 = 36 & \cdot 2 \\ 2x_0 + 5y_0 = 26 & \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 10x_0 - 4y_0 = 72 \\ 10x_0 + 25y_0 = 130 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{58}{29} = 2 \quad \text{y} \quad 2x_0 + 5 \cdot 2 = 26 \Rightarrow x_0 = 8$$

(1.0) → Sigue que $Q(8, 2)$ es simétrico de P por L .

Punto PROBLEMA 2

Sea $P(x_0, y_0)$ punto del lugar geométrico y $A(1, -3)$, $B(3, -3)$ puntos fijos dados.

La condición que debe cumplirse es que el producto de las pendientes de las rectas por PA y por PB sea constante e igual a 4.

Entonces $m_{PA} = \frac{y_0 + 3}{x_0 - 1}$ y $m_{PB} = \frac{y_0 + 3}{x_0 - 3}$, entonces.

10 $\Rightarrow m_{PA} \cdot m_{PB} = 4 \Rightarrow \frac{y_0 + 3}{x_0 - 1} \cdot \frac{y_0 + 3}{x_0 - 3} = 4$

$$\Rightarrow (y_0 + 3)^2 = 4(x_0 - 1)(x_0 - 3) = 4(x_0^2 - 4x_0 + 3)$$

10 $\Rightarrow$ completando cuadrados: $(y_0 + 3)^2 = 4[(x_0 - 2)^2 - 1]$

Entonces $4(x_0 - 2)^2 - (y_0 + 3)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x_0 - 2)^2}{1} - \frac{(y_0 + 3)^2}{4} = 1}$ es el LG

Se trata de una hipérbola con centro en $(x_c, y_c) = (2, -3)$

10 $\Rightarrow$ excentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{1 + 4}}{1} = \sqrt{5}$ donde $\frac{a}{b} = 1$
 $b = 2$

Focos: $F(x_c \pm ae, y_c) = F(2 \pm \sqrt{5}, -3)$

Directrices $x = x_c \pm \frac{a}{e} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

10 $\Rightarrow$ Asintotas: $y - y_c = \pm \frac{b}{a}(x - x_c) \Rightarrow y + 3 = \pm 2(x - 2)$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 2018-1

Control 2

P1) (6.0 pts.) Determine las coordenadas de los cuatro vértices de un paralelogramo sabiendo que dos de sus lados están contenidos en las rectas $\mathcal{L}_1 : 3x - 7y + 18 = 0$ y $\mathcal{L}_2 : x + 2y - 7 = 0$ y además una de sus diagonales está contenida en la recta $\mathcal{L}_3 : 5x - 3y - 22 = 0$.

Indicación: Recuerde que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (note que en este caso **no necesariamente** se trata de un rectángulo o un cuadrado).

P2) (6.0 pts.) Considere los puntos $A(2,0)$ y $B(-2,0)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $P(\alpha, \beta)$ del plano que satisfacen la siguiente condición:

Si C es el punto de intersección de la recta $\overline{BP}$ con la vertical que pasa por A ; y D es el punto de intersección de la recta $\overline{AP}$ con la vertical que pasa por B , entonces los trazos $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ (donde O es el origen), son perpendiculares entre sí (vea la figura como referencia).

Identifique el lugar geométrico resultante indicando, si corresponde, semi-ejes, excentricidad, focos, directrices.

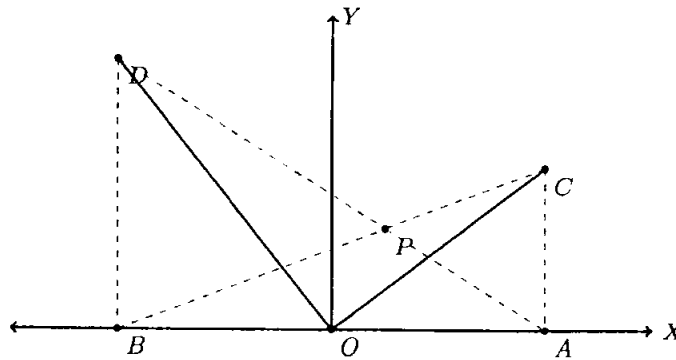


Figura 1: Esquema Pregunta 2

Tiempo: 1 hora 15 minutos.

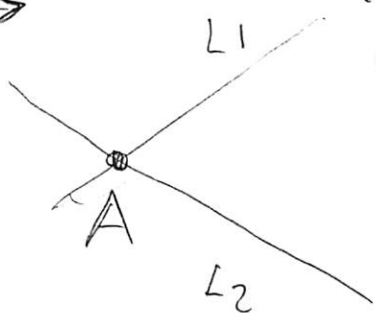
Introducción al Cálculo (MA1001)

Control 2 Puntos Problema 1

$L_1: 3x - 7y + 18 = 0$ y $L_2: x + 2y - 7 = 0$ son rectas que contienen dos lados del paralelogramo

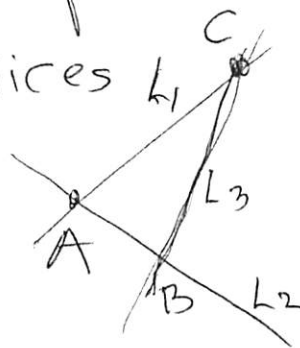
Como $m_{L_1} = \frac{3}{7}$ y $m_{L_2} = -\frac{1}{2}$ las rectas no son paralelas y su intersección es uno de los vértices

(10) Por $L_1 \cap L_2: \begin{cases} 3x - 7y = -18 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=3 \Rightarrow A(1,3)$



Además una de las diagonales es $L_3: 5x - 3y - 22 = 0$ y se verifica que $A \notin L_3$ pues $5 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 22 \neq 0$

Sigue que L_3 contiene a la diagonal que no pasa por el vértice A y por lo tanto determina otros dos vértices B y C



$C \in L_1 \cap L_3 \wedge B \in L_2 \cap L_3$

$\Rightarrow C \begin{cases} 3x - 7y = -18 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases} \Rightarrow C(8,6)$

$B \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases} \Rightarrow B(5,1)$

El cuarto vértice será la intersección de las rectas paralelas a L_1 y L_2 por los puntos B y C respectivamente.

En $m_{L_1} \wedge B(5,1) \Rightarrow L_{BD}: y - 1 = \frac{3}{7}(x - 5)$

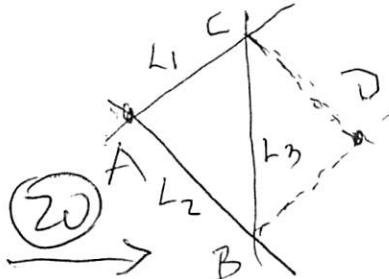
$\Leftrightarrow 3x - 7y = 8$

En $m_{L_2} \wedge C(8,6) \Rightarrow L_{CD}: y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 8)$

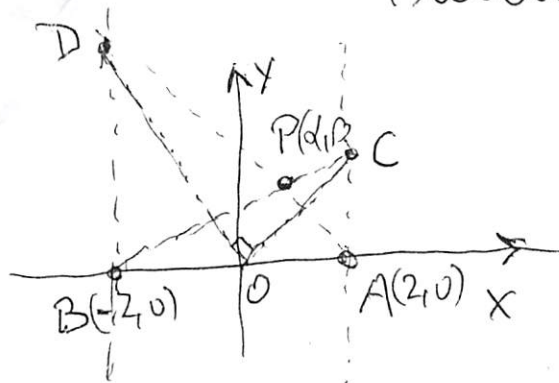
$\Leftrightarrow x + 2y = 20$

Por $D \begin{cases} 3x - 7y = 8 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow D(12,4)$

Vértices
 $A(1,3), B(5,1), C(8,6)$
 $D(12,4)$



Pregunta Problema 2



Sea $P(\alpha, \beta)$ punto del L.G.

$$A(2,0), B(-2,0)$$

Vertical por A: $x=2$

Vertical por B: $x=-2$

Recta BP, por B: $y = \frac{\beta}{\alpha+2}(x+2)$

Su intersección con la vertical por A determina C

asi.
$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\beta}{\alpha+2}(x+2) \\ x &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C\left(2, \frac{4\beta}{\alpha+2}\right)$$

Recta AP, por A: $y = \frac{\beta}{\alpha-2}(x-2)$

Su intersección con la vertical por B determina D

asi.
$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\beta}{\alpha-2}(x-2) \\ x &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D\left(-2, \frac{-4\beta}{\alpha-2}\right)$$

Las pendientes de los trazo OC y OD serán

$$m_{OC} = \frac{\frac{4\beta}{\alpha+2}}{2} = \frac{2\beta}{\alpha+2} ; m_{OD} = \frac{\frac{-4\beta}{\alpha-2}}{-2} = \frac{2\beta}{\alpha-2}$$

La condición es $\overline{OC} \perp \overline{OD} \Rightarrow m_{OC} \cdot m_{OD} = -1$

$$\Rightarrow \frac{2\beta}{\alpha+2} \cdot \frac{2\beta}{\alpha-2} = -1 \Rightarrow 4\beta^2 = -(\alpha^2 - 4) \Rightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4} + \beta^2 = 1 \quad \text{o generalizando } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Se trata de una elipse de semiejes $a=2, b=1$

excentricidad $e = \frac{\sqrt{4-1}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, Focos $(\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{3}, 0)$

Directrices: $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$

Control 2, MA1001 CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (31 de Marzo)

a₁) (1.5 ptos.) Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2}$$

a₂) (1.5 ptos.) Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2}$$

Solución a₁

Se ordena la inecuación del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2} &\iff \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} \geq 0 \\ &\iff \frac{x(x-2) - (x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ &\iff \frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \end{aligned}$$

La solución es por lo tanto el intervalo (1, 2)

Solución a₂

Se separa la inecuación en los casos $x \in (-\infty, 1)$ y $x \in [1, \infty)$.

Caso 1: $x \in (-\infty, 1)$. En este caso $x-1 < 0$ luego $|x-1| = -(x-1)$. De este modo, la inecuación en este intervalo queda:

$$\begin{aligned} \frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2} &\iff -\frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2} \\ &\iff \frac{x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-2} \end{aligned}$$

Esta es la inecuación complementaria a la de la parte a₁, luego, su solución en $\mathbb{R}$ es el conjunto $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

La solución de la inecuación en el intervalo considerado es: $(-\infty, 1)$

Caso 2: $x \in [1, \infty)$. En este caso $x-1 \geq 0$ luego $|x-1| = (x-1)$. De este modo, la inecuación en este intervalo queda:

$$\frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2} \iff \frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2}$$

Esta es la inecuación la de la parte a₁, luego, su solución en $\mathbb{R}$ es el conjunto (1, 2).

La solución de la inecuación en el intervalo considerado es: (1, 2)

La solución final de la inecuación es el conjunto $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

- b) (3 ptos.) Considere los puntos $A(a, 0)$ y $B(-a, 0)$, donde $a > 0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la relación

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

Solución b

Las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} son respectivamente:

$$m_{PA} = \frac{y}{x-a}, \quad m_{PB} = \frac{y}{x+a}$$

Claramente, el punto P debe tener abscisa $x \neq a$ y $x \neq -a$, es decir esas rectas verticales no contienen puntos del Lugar Geométrico buscado.

La condición dada en el problema impone que:

$$P \in \text{L.G.} \iff m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

$$\iff \frac{y}{x-a} = \frac{2\left(\frac{y}{x+a}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x+a}\right)^2}$$

$$\iff |x| \neq a \wedge y = \frac{2y(x^2 - a^2)}{(x+a)^2 - y^2}$$

$$\iff |x| \neq a \wedge y \neq \pm(x+a) \wedge y\{-x^2 + 2ax + 3a^2 - y^2\} = 0$$

$$\iff |x| \neq a \wedge y \neq \pm(x+a) \wedge (y = 0 \vee (x-a)^2 + y^2 = 4a^2)$$

Por lo tanto, el lugar geométrico corresponde a la unión de la recta $y = 0$ (Eje de las X) con la circunferencia $(x-a)^2 + y^2 = 4a^2$ (de centro $(a, 0)$ y radio $2a$), eliminando los puntos de abscisa $x = \pm a$ y las rectas $y = \pm(x+a)$.

