Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra 07-1

Control 2

P1. **(a)** (2 ptos.) Sean A, B y C conjuntos, subconjuntos de un universo U. Pruebe que

$$(A \cap B) \subseteq C \;\Rightarrow\; (A \cap C^c) \subseteq B^c.$$

(b) (4 ptos.) Dados A y B conjuntos, demuestre que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \;\vee\; B \subseteq A).$$

P2. **(a)** (2 ptos.) Considere las funciones $f, g : A \to B$, con $A, B \neq \phi$ y f inyectiva.
Se define $\varphi : A \to B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, para cada $x \in A$.
Demuestre que φ es inyectiva.

(b) (4 ptos.) Sea $U \neq \phi$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$, para cada $(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$.
Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f.
Indicación: Si su respuesta es afirmativa, debe demostrarlo. Si es negativa, debe exhibir un contraejemplo.

31 de marzo de 2007

Solución y Pauta Control 2, MA110 ALGEBRA
Semestre 2007/1 (31 de Marzo)

P1 i) Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que.

$$A \cap B \subseteq C \Rightarrow (A \cap C^c) \subseteq B^c$$

Solución: Una forma es usar la hipótesis y unir con A^c

Así $(A \cap B) \cup A^c \subseteq C \cup A^c \Rightarrow (A \cup A^c) \cap (B \cup A^c) \subseteq C \cup A^c$

Como $A \cup A^c = U$, queda $U \cap (B \cup A^c) \subseteq C \cup A^c$

$$\Rightarrow (B \cup A^c) \subseteq (C \cup A^c) \longrightarrow \boxed{1,0 \text{ pto}}$$

además $B \subseteq B \cup A^c$, entonces, por transitividad

$$B \subseteq (C \cup A^c) \Rightarrow (C \cup A^c)^c \subseteq B^c \quad \text{(Prop Clase)}$$

y por ley de Morgan queda $(A \cap C^c) \subseteq B^c \longrightarrow \boxed{1.0 \text{ pto}}$

OBSERVACION: Revisar con cuidado, hay varias otras formas

ii) Sean A, B conjuntos. Demuestre que

$$[P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)] \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$$

Solución.

$(\Leftarrow)$ Si $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B)$ (1)

además $\underbrace{A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)}_{\text{Propiedad que se acepta}} \Rightarrow P(A) \cup P(B) = P(B)$ (2)

de modo que, de (1) y (2) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

2.0 pts

Análogamente se procede si $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$ ... etc.

$(\Longleftarrow)$ Usaremos que $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

Como $(A \cup B) \in P(A \cup B) \Leftrightarrow (A \cup B) \in (P(A) \cup P(B))$ (por la igualdad)

$\Leftrightarrow (A \cup B) \in P(A) \vee (A \cup B) \in P(B)$ (Definición de unión)

$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq A \vee (A\cup B)\subseteq B \Rightarrow B\subseteq A \vee A\subseteq B$ $\boxed{2.0 \text{ ptos}}$

P2 i) Considere las funciones $f, g: A\to B$ $A, B\neq\phi$ donde f es inyectiva.

Se define $\varphi: A\to A\times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$

Demuestre que φ es inyectiva.

En efecto, sean $x_1, x_2\in A$ tales que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

$\Rightarrow (f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge g(x_1) = g(x_2)$

$\boxed{2.0 \text{ ptos}}$ pero f inyectiva $\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

OBS: en el ultimo paso usamos $[p\wedge q\Rightarrow p]\Leftrightarrow V$, es decir la conclusion es independiente de la funcion g.

ii) Sea $U\neq\phi$ un conjunto universo. Se define la función

$f: P(U)\times P(U)\to P(U)$ por $f(X, Y) = X - Y$

Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f.

1) Inyectividad $f(X, Y) = X - Y = X\cap Y^c$

Es inmediato que para $X=\phi$. $f(\phi, Y) = \phi$ $\forall Y\in P(U)$

$\boxed{2.0 \text{ ptos}}$ de modo que f no es inyectiva (varios pares con igual imagen)

2) Sobreyectividad $f(X,Y) = X \cap Y^c$

Basta tomar ahora, por ejemplo, $Y = \phi$, es decir $Y^c = \phi^c = U$

de modo que $f(X,\phi) = X \cap U = X \quad \forall X \in P(U)$

$\boxed{2.0 \text{ pts}}$ Así f recorre todo $P(U)$ y por lo tanto es sobreyectiva.

OBS: Revisar con cuidado, hay varias alternativas de elección

Control 2

P1. Sea $f : [0,1) \to [0,1)$ una función definida en cada $x \in [0,1)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

(a) (3 ptos.) Verificar si f es sobreyectiva o inyectiva. Justifique su respuesta con una demostración.

(b) (3 ptos.) Sea $I = [a,b] \subseteq [0,1)$. Probar que $f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$.

P2. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por

$$\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$$

(i) (1 pto.) Justifique por qué $\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\Psi(f,g) \in \mathcal{F}$.

(ii) (2 ptos.) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero **no** inyectiva.

(iii) (1,5 ptos.) Demuestre que, para todo par $(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi\left(\Psi(f,g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

(iv) (1,5 ptos.) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por $f_1(x) = 2x+3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3+4$, $g_1(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{(f_1,g_1),(f_2,g_2)\}$. Encuentre $\Psi(A)$.

12 de abril de 2008
Sin consultas
Tiempo: 1:15

Control 2 ALGEBRA

Pauta Problema 1

Sea $f:[0,1)\to[0,1)$ una función definida en cada $x\in[0,1)$ por:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2})\\ 2x-1 & \text{si } x\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

a) Verificar si f es sobreyectiva e inyectiva. Justifique.

$\therefore$ f es sobreyectiva, es decir $(\forall y\in[0,1))(\exists x\in[0,1));\ y=f(x)$.

En efecto, sea $y\in[0,1)$. Basta tomar $x=\frac{y}{2}$ con lo que $0\leq\frac{y}{2}<\frac{1}{2}$, es decir $x\in[0,\frac{1}{2})\subseteq[0,1)$ y tal que

$$f(x)=f(\tfrac{y}{2})=2\,\tfrac{y}{2}=y \qquad (f(x)=2x \text{ en } x\in[0,\tfrac{1}{2}))$$

$\longrightarrow$ 1.5

$\therefore$ f NO es inyectiva.

Por ejemplo, sean $x_1=\frac{1}{4}$ y $x_2=\frac{3}{4}$

Así, $x_1\neq x_2$, pero $f(x_1)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ pues $x\in[0,\frac{1}{2})$

y $f(x_2)=2\cdot\frac{3}{4}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ pues $x\in[\frac{1}{2},1)$

Sigue que $x_1\neq x_2 \wedge f(x_1)=f(x_2)$, es decir, f no es inyectiva

$\longrightarrow$ 1.5

b) Sea $I=[a,b]\subseteq[0,1)$.

Probar que $f^{-1}(I)=[\frac{a}{2},\frac{b}{2}]\cup[\frac{a}{2}+\frac{1}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}]$

Como $[a,b]\subseteq[0,1) \Rightarrow [\frac{a}{2},\frac{b}{2}]\subseteq[0,\frac{1}{2})$

Así, $\forall x\in[\frac{a}{2},\frac{b}{2}] \Rightarrow f(x)=2x \wedge f(x)\in[2\frac{a}{2},2\frac{b}{2}] \Rightarrow f(x)\in[a,b]$

Sigue que $f^{-1}[a,b]=f^{-1}(I)=[\frac{a}{2},\frac{b}{2}]$

$\longrightarrow$ 1.5

Analogamente, $\left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right] \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

Assim $\forall x \in \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(x) = 2x-1 \wedge f(x) \in \left[2\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)-1, 2\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right)-1\right]$

$\Rightarrow f(x) \in [a, b]$

Segue que $f^{-1}[a,b] = f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$

Então $f^{-1}(I) \cup f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$, isto é

$$f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right] \longrightarrow 1.5$$

Control 2 ALGEBRA

Pauta Problema 2

Considere el conjunto $F = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva} \}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Se define la función $\Psi : F \times F \longrightarrow F$ dada por $\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$

i) Justifique porqué $\forall (f,g) \in F \times F$, $\Psi(f,g) \in F$

f y g son biyecciones, por lo tanto $f \circ g$ es biyectiva y su inversa $(f \circ g)^{-1}$ es también biyectiva.

Así, $\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$ es biyectiva, es decir $\Psi(f,g) \in F$ $\longrightarrow$ 1.0

ii) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero NO inyectiva.

- Ψ sobreyectiva

Se debe probar que $\forall h \in F$, $\exists (f,g) \in F \times F$ tal que $\Psi(f,g) = h$

En efecto, dado $h \in F$, basta tomar $(id_{\mathbb{R}}, h^{-1}) \in F \times F$

con lo cual $\Psi(id_{\mathbb{R}}, h^{-1}) = (id_{\mathbb{R}} \circ h^{-1})^{-1} = (h^{-1})^{-1} = h$

OBSERVAR que el par (f,g) escogido es el par $(id_{\mathbb{R}}, h^{-1}) \in F \times F$ $\longrightarrow$ 1.0

- Ψ NO es inyectiva.

Basta, por ejemplo, encontrar dos o más pares de biyecciones que tengan la misma imagen

Sean $(f, f^{-1}) \in F \times F \wedge (g, g^{-1}) \in F \times F$ con $(f, f^{-1}) \neq (g, g^{-1})$

Sin embargo $\Psi(f, f^{-1}) = (f \circ f^{-1})^{-1} = id_{\mathbb{R}}^{-1} = id_{\mathbb{R}}$

y $\Psi(g, g^{-1}) = (g \circ g^{-1})^{-1} = id_{\mathbb{R}}^{-1} = id_{\mathbb{R}}$. 1.0

Así $(f, f^{-1}) \neq (g, g^{-1})$ pero $\Psi(f, f^{-1}) = \Psi(g, g^{-1})$ y Ψ NO es inyectiva.

OBSERVAR que para probar la sobreyección y la no inyectividad de ψ pueden haber varias otras formas o contraejemplos

iii) Demuestre que, para todo par $(f,g) \in F \times F$,

$$\psi\left(\psi(f,g),\ \psi(g^{-1},f^{-1})\right) = id_{\mathbb{R}}$$

En efecto.

$$\psi\left(\psi(f,g),\ \psi(g^{-1},f^{-1})\right) = \left[\psi(f,g) \circ \psi(g^{-1},f^{-1})\right]^{-1} = \left[(f\circ g)^{-1} \circ (g^{-1}\circ f^{-1})^{-1}\right]^{-1}$$

$$= (g^{-1}\circ f^{-1}) \circ (f \circ g) \qquad \text{usando } (s\circ h)^{-1} = h^{-1}\circ s^{-1} \ \wedge\ (s^{-1})^{-1} = s$$

$$= \underbrace{g^{-1}\circ (f^{-1}\circ f)\circ g}_{\text{ASOCIANDO}} = g^{-1}\circ id_{\mathbb{R}}\circ g = g^{-1}\circ g = id_{\mathbb{R}} \qquad (id_{\mathbb{R}}\circ s = s)$$

$\longrightarrow$ 1.5

iv) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in F$ definidas por $f_1(x) = 2x+3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3+4$, $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{(f_1,g_1),(f_2,g_2)\}$. Encuentre $\psi(A)$

Claramente $\psi(A) = \{\psi(f_1,g_1), \psi(f_2,g_2)\}$

$$f_1\circ g_1 = f_1(g_1) = f_1(x^3) = 2x^3+3 \Rightarrow (f_1\circ g_1)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}} = \psi(f_1,g_1)$$

$$f_2\circ g_2 = f_2(g_2) = f_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = 5\,\frac{x^3}{8} + 4 \Rightarrow (f_2\circ g_2)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{8(x-4)}{5}} = \psi(f_2,g_2)$$

Sigue que $\psi(A) = \left\{\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}},\ 2\sqrt[3]{\frac{x-4}{5}}\right\}$

$\longrightarrow$ 1.5

OBSERVAR que los cálculos de las inversas pueden considerarse inmediatos por tratarse de biyecciones simples de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Control 1

P1. Se define F como el conjunto de todas las funciones sobreyectivas $f : D_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \to f(D_{a,b})$ de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ donde a y b son constantes reales no nulas y $D_{a,b}$ es el mayor conjunto donde f está bien definida.

(i) (1,0 ptos.) Encuentre $D_{a,b}$

(ii) (3,0 ptos.) Encuentre condiciones para a y b de modo que f sea biyectiva.

(iii) (2,0 ptos.) Si f es invertible, encuentre f^{-1} y muestre que $f^{-1} \in F$

P2. Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] : f \text{ es función } \}$ y $\beta = \{f[0,1] \to [0,1] : f \text{ es función biyectiva } \}$
Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rl} \Psi : & \mathcal{F} \to [0,1] \\ & f \to \Psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rl} I : & \beta \to \beta \\ & f \to I(f) = f^{-1} \end{array}$$

(i) (1,0 ptos.) Demuestre que Ψ está bien definido, es decir verifique que $(\forall f \in F)\ \Psi(f) \in [0,1]$.

(ii) (1,5 ptos.) Estudie Inyectividad y Sobreyectividad de Ψ.

(iii) (0,5 ptos.) Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.

(iv) (1,5 ptos.) Pruebe que I es biyectiva.

(v) (1,5 ptos.) Demuestre que $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \phi$ (Preimagen).

13 de abril de 2009
Sin consultas
Tiempo: 1:15

Pauta Control 2

P1. Se define $\mathcal{F}$ como el conjunto de todas las funciones sobreyectivas $f : D_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \to f(D_{a,b})$ de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ donde a y b son constantes reales no nulas y $D_{a,b}$ es el mayor conjunto donde f está bien definida.

(i) Encuentre $D_{a,b}$

(ii) Encuentre condiciones para a y b de modo que f sea biyectiva.

(iii) Si f es invertible, encuentre f^{-1} y muestre que $f^{-1} \in \mathcal{F}$

Solución:

(i) Es necesario que $bx + a \neq 0$, es decir $x \neq -\frac{a}{b}$, $a, b \neq 0$.
Sigue que $D_{a,b} = \mathbb{R} - \{-\frac{a}{b}\}$ (1.0 puntos).

(ii) Por definición del conjunto F, las funciones f son sobreyectivas.
Falta, entonces, encontrar condiciones para a y b de modo que se cumpla la inyectividad.

(0.5 puntos).

Sean $x_1, x_2 \in D_{a,b}$ tales que

$$f_{(x_1)} = f_{x_2} \Leftrightarrow \frac{ax_1+b}{bx_1+a} = \frac{ax_2+b}{bx_2+a} \Leftrightarrow abx_1x_2 + a^2x_1 + b^2x_2 + ab = abx_1x_2 + a^2x_2 + b^2x_1 + ab$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)x_1 + (b^2-a^2)x_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow (a^2-b^2)(x_1-x_2) = 0$$

(1.5 puntos).

Sigue que $x_1 - x_2 = 0$, es decir $x_1 = x_2$ y f inyectiva si $a^2 - b^2 \neq 0$ ó $a \neq \pm b$ (1.0 puntos).

(iii) f es invertible, entonces, $\exists f^{-1} : f(D_{a,b}) \to D_{a,b}$ tal que $f \circ f^{-1} =$ id.
Entonces $(f \circ f)^{-1}(x) =$ id $(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}_{(x)}) = x$ (0.5 puntos).

$$\Leftrightarrow \frac{af^{-1}(x)+b}{bf^{-1}(x)+a} = x \Leftrightarrow af^{-1}(x) + b = bxf^{-1}(x) + ax \qquad \left(x \neq -\frac{a}{b}\right)$$

Sigue que $f^{-1}_{(x)} = \frac{-ax+b}{bx-a}$ (1.0 puntos).

Claramente f^{-1} tiene la forma de las funciones del conjunto $\mathcal{F}$ y las condiciones de inyectividad garantizan que $a \neq \pm b$ de modo que está bien definida y $f^{-1} \in \mathcal{F}$ (0.5 puntos).

P2. Sea $F = \{f : [0,1] \to [0,1]/f$ es función $\}$ y $B = \{f[0,1] \to [0,1]/f$ es función biyectiva $\}$
Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & F \to [0,1] \\ & f \to \Psi(f) = \tfrac{f(0)+f(1)}{2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} I : \quad & B \to B \\ & f \to I(f) = f^{-1} \end{aligned}$$

(i) Demuestre que Ψ está bien definida, es decir, verifique que $(\forall f \in F)\ \Psi(f) \in [0,1]$.

(ii) Estudie Inyectividad y Sobreyectividad de Ψ.

(iii) Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.

(iv) Pruebe que I es biyectiva.

(v) Demuestre que $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \phi$ (Preimagen)

Solución:

(i) Sea $f \in F$, entonces $\Psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$ pero $0 \leq f(0) \leq 1 \wedge 0 \leq f(1) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(0)+f(1) \leq 2$
Sigue que $0 \leq \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq 1$ entonces $\Psi(f) \in [0,1]$ (1.0 puntos)

(ii) - Ψ no es inyectiva.
Por ejemplo, tomamos $f, g \in F$ tales que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $g(0) = 1$; $g(1) = 0$
Así, $\Psi(f) = \Psi(g) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ pero $f \neq g$ (0.7 puntos)
- Ψ es sobreyectiva.
Por demostrar que $(\forall c \in [0,1])(\exists f \in F)\ \Psi(f) = c$
En efecto, para $c \in [0,1]$ basta tomar $f(x) = c$ (función constante) de modo que
$\Psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{c+c}{2} = c$ (0.8 puntos)

(iii) Es inmediato, para funciones biyectivas

$$I(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = I(g) \circ I(f)$$

(0.5 puntos)

(iv) I es inyectiva
Sean $f_1, f_2 \in B$ tales que $I(f_1) = I(f_2) \Leftrightarrow f_1^{-1} = f_2^{-1}$
$\Rightarrow f_1 = f_2 \quad \big((f^{-1})^{-1} = f\big)$ (0.7 puntos)
I es sobreyectiva
Por demostrar que $(\forall g \in B)(\exists f \in B) I(f) = g$.
En efecto, $I(f) = g \Rightarrow f^{-1} = g \Rightarrow f = g^{-1} \in B$
Es decir, basta tomar $f = g^{-1}$ (0.8 puntos)

(v) Para $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\})$ debemos encontrar las funciones biyectivas
$f \in B$ tales que $(\Psi \circ I)(f) = 0$ (0.5 puntos)
Sigue que $(\Psi \circ I)(f) = \Psi(I(f)) = \Psi(f^{-1}) = \frac{f^{-1}(0)+f^{-1}(1)}{2} = 0$ con $f^{-1}(0), f^{-1}(0) \in [0,1]$, de donde necesariamente $f^{-1}(0) = f^{-1}(1) = 0$ pero esto es imposible porque f^{-1} es biyectiva y en particular inyectiva.
Sigue que $\forall f \in B\ (\Psi \circ I)(f) \neq 0$
Asi $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \phi$. (1.0 puntos)

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101 Introducción al Álgebra 10-1

Control 2

P1. Sea $\mathcal{U} \neq \varnothing$ un conjunto universo. Se define la función $f : P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) \to P(\mathcal{U})$ por $f(X, Y) = X \cup Y$ para cada $(X, Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U})$.

(i) (1.0 ptos.) Calcule, justificando su respuesta, $f^{-1}(\{\varnothing\})$.

(ii) (2.0 ptos.) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X, Y) \in P^2(\mathcal{U}) \ / \ X^c \subseteq Y\}$.

(iii) (1.5 ptos.) Demuestre que f es sobreyectiva.

(iv) (1.5 ptos.) ¿Es f biyectica? Justifique.

P2. (a) (3.0 ptos.) Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) = ax^2\}$.
Se define la función $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ por $\forall f \in \mathcal{F}$, $\varphi(f) = f(2)$.
Demuestre que φ es una función biyectiva.

(b) (3.0 ptos.) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $g(g(x)) = x^3 + 1$.
Pruebe que g es biyectiva.

Tiempo: 1.15 horas.

Pauta Control 2

P1. $\mathcal{U} \neq \phi$, $f : P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) \to P(\mathcal{U})$ con $f(X,Y) = X \cup Y, (X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U})$

i) Calcular $f^{-1}(\{\phi\})$ (Preimagen de $\{\phi\}$).
Es preciso encontrar los pares $(X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U})$ tales que $f(X,Y) = X \cup Y = \phi$.
Es inmediato que el único par posible es (ϕ, ϕ) pués $f(\phi, \phi) = \phi \cup \phi = \phi$.
Sigue que $f^{-1}(\{\phi\}) = \{(\phi, \phi)\}$. (1.0 puntos)

ii) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$
Sea $(X,Y) \in \{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$ entonces $X^c \subseteq Y \Rightarrow X \cup X^c \subseteq X \cup Y$
$\Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq X \cup Y$ y como $X \cup Y \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow X \cup Y = \mathcal{U}$, es decir $f(X,Y) = \mathcal{U}$
$\Rightarrow (X,Y) \in f^{-1}(\{\mathcal{U}\})$ de donde $\{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c\} \subseteq f^{-1}(\{\mathcal{U}\})$ (1.0 puntos)

Para la otra inclusión, sea $(X,Y) \in f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \Leftrightarrow f(X,Y) \in \{\mathcal{U}\}$
$\Leftrightarrow f(X,Y) = \mathcal{U} \Leftrightarrow X \cup Y = \mathcal{U} \Leftrightarrow X^c \cap Y^c = \mathcal{U}^c = \phi$
$\Rightarrow X^c \subseteq Y$, es decir $(X,Y) \in \{(X,Y) \in \{P(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$
Asi, $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \subseteq \{(X,Y) \in P(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$ (1.0 puntos)

Se concluye que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$

iii) Demuestre que f es sobreyectiva.

Por demostrar que $(\forall X \in P(\mathcal{U}))(\exists (Y,Z) \in P^2(\mathcal{U}))$ tal que $f(Y,Z) = X$. (1.5 puntos)

Basta tomar $(Y,Z) = (\phi, X) \in P^2(\mathcal{U})$ con lo cual $f(\phi, X) = \phi \cup X = X$.

iv) Inyectividad: Es fácil ver que, por ejemplo, los pares (X, X^c) e (Y, Y^c) que son distintos, tienen la misma imagen:
$f(x, x^c) = f(Y, Y^c) = X \cup X^c = Y \cup Y^c = \mathcal{U}$. (1.5 puntos)

Sigue que f no es inyectiva y por lo tanto no es biyectiva.

P2.

a) Sea $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2\}$. Se define $\varphi : F \to \mathbb{R}$ por $\forall f \in F$, $\varphi(f) = f(2)$.
Demostrar que φ es biyectiva.

i) φ es inyectiva si $(\forall f_1, f_2 \in F)[\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2]$. Sean $f_1, f_2 \in F$, es decir
$(\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_1(x) = a_1 x^2$ y $f_2(x) = a_2 x^2$.
Entonces si $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Leftrightarrow f_1(2) = f_2(2) \Leftrightarrow 4a_1 = 4a_2 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow a_1 x^2 = a_2 x^2$; $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f_1 = f_2$

Sigue que φ es inyectiva. (1.5 puntos)

ii) φ es sobreyectiva si $(\forall b \in \mathbb{R})(\exists f \in F)$; $\varphi(f) = b$

Sea $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\varphi(f) = f(2) = 4a$. Para $\varphi(f) = b$ basta que $4a = b$ es decir $a = \frac{1}{4}b$.

Así, bastará tomar $f(x) = \frac{1}{4}bx^2$ para que $\varphi(f) = f(2) = \frac{1}{4}b \cdot 4 = b$.

Sigue que φ es sobreyectiva. Se concluye que φ es biyectiva (1.5 puntos)

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(g(x)) = x^3 + 1$. Demostrar que g es biyectiva.
En efecto, como $h(x) = x^3 + 1$ es biyectiva (puede admitirse sin demostrarlo),
se concluye que $g(g(x)) = (g \circ g)(x)$ es biyectiva. (1.0 puntos)

Segun la propiedad $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva y $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
Com o $g \circ f$ es biyectiva $\Rightarrow g \circ g$ es inyectiva y sobreyectiva.
Sigue que $g \circ g$ es inyectiva $\Rightarrow g$ inyectiva
y $g \circ g$ es sobreyectiva $\Rightarrow g$ es sobreyectiva.
Se concluye que g es biyectiva. (2.0 puntos)

Control 2

P1. a) Sean A, B conjuntos no vacíos. Considere la función $\varphi : A \times B \to A$ definida por $\varphi(a,b) = a$

i) Demostrar que φ es sobreyectiva

ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto B resulta φ es inyectiva? Justifique su respuesta

b) Sea A un conjunto no vacío. Se define la función $d : A \to A \times A$ por $d(a) = (a,a)$.

i) Demostrar que d es inyectiva

ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A resulta d sobreyectiva? Justifique su respuesta

P2. Sea $f : A \to B$ una función donde $A, B \neq \phi$

a) (3.0 ptos.) Demuestre que $\forall B_1 \subseteq B$ se tiene que:

$$f^{-1}(B_1^c) = [f^{-1}(B_1)]^c$$

Observación: Note que los complementos son tomados con respecto a B y a A, respectivamente

b) Primero demuestre que (1,0 pto.) para todo par de conjuntos A, B:

$$A \triangle B = (A \cap B)^c \cap (A^c \cap B^c)^c$$

Ahora, asumiendo que

$$(\forall B_1, B_2 \subseteq b), f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

y usando la parte a) deduzca que

$$(\forall B_1, B_2 \subseteq b), f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)$$

P1) a) i) Sea $a \in A$. Notemos que, cualquiera sea $b \in B$, $\varphi(a,b) = a$ por lo que φ es sobreyectiva (2,0 ptos)

ii) Notemos que si $B = \{b\}$ entonces todo elemento $y \in B \Rightarrow y = b$. Así, si $(x,y) \in A \times B$ entonces $y = b$. Luego sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en $A \times B$ tales que

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

y como $y_1, y_2 \in B \Rightarrow y_1 = y_2 = b$ con lo que φ es ~~sob.~~ inyectiva

P1) b) i) Sean a_1, a_2 tales que

$$d(a_1) = d(a_2) \Rightarrow (a_1, a_1) = (a_2, a_2)$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2$$

por lo que d es inyectiva. (2,0 ptos)

ii) Notamos que los únicos elementos en $A \times A$ que tienen preimagen a través de d son los elementos "de la diagonal". Es decir los $(x,y) \in A \times A$ tales que $x = y$.
Ahora, para asegurar que todo elemento de $A \times A$ tenga preimagen basta con poner $A = \{a\}$. De este modo $A \times A = \{(a,a)\}$

y $d(a) = (a,a)$
lo que hace sobreyectiva a d. (1,0 ptos)

P2) a) Sea $B_1 \subseteq B$ y tenemos.

$$x \in f^{-1}(B_1^c) \underset{\text{def } f^{-1}(\cdot)}{\overset{(1{,}0\text{pto})}{\Longleftrightarrow}} f(x) \in B_1^c \underset{\text{def complemento}}{\overset{(1{,}0\text{pto})}{\Longleftrightarrow}} f(x) \notin B_1$$

$$\underset{\text{def } f^{-1}}{\Longleftrightarrow} x \notin f^{-1}(B_1) \Longleftrightarrow x \in [f^{-1}(B_1)]^c$$

1,0 pto.

b) Sean A, B conjuntos entonces.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$
$$= (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c \qquad (1{,}0\text{pto.})$$

Luego.

$$f^{-1}(C_1 \Delta C_2) = f^{-1}((C_1^c \cap C_2^c)^c \cap (C_1 \cap C_2)^c)$$

(1pto)
$$= f^{-1}((C_1^c \cap C_2^c)^c) \cap f^{-1}((C_1 \cap C_2)^c)$$
$$= [f^{-1}(C_1^c \cap C_2^c)]^c \cap [f^{-1}(C_1 \cap C_2)]^c$$
$$= [f^{-1}(C_1^c) \cap f^{-1}(C_2^c)]^c \cap [f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)]^c$$

parte a) // $= [\{f^{-1}(C_1)\}^c \cap \{f^{-1}(C_2)\}^c]^c \cap [f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)]^c$

(1pto) de Morgan // $= [f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2)] \cap [f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)]^c$

Def Δ // $= f^{-1}(C_1) \Delta f^{-1}(C_2)$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introduccón al Álgebra 12-1

Control 2

P1. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \phi$ y $B \cap D = \phi$ y sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}.$$

(i) (2,0 ptos.) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.

(ii) (2,0 ptos.) Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

(iii) (2,0 ptos.) Si f, g son biyectivas, demuestre que h es biyectiva y encuentre su inversa. Justifique su respuesta.

P2. Sea $E \neq \phi$ un conjunto cualquiera y $A \subseteq E$ con $A \neq \phi$. Se define

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto f(X) = X \setminus A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto g(X) = X \cup A \end{aligned}$$

(i) (3,0 ptos.) Demuestre que $f \circ g = f$ y que $g \circ f = g$.

(ii) (1,5 ptos.) Demuestre que $f^{-1}(\{\phi\}) = \mathcal{P}(A)$ (conjunto preimagen).

(iii) (1,5 ptos.) Demuestre que $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(X) \neq A$.

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al algebra (12-1)
Pauta control 2

Problema 1 $A\cap C=\phi$, $B\cap D=\phi$, $f A\to B$; $g: C\to D$

Se define $h: A\cup C\to B\cup D$; $\forall x\in A\cup C$ $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A\\ g(x) & \text{si } x\in C\end{cases}$

i) Demostrar que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.

∴ En efecto: Sean $x_1, x_2 \in A\cup C$ tales que $h(x_1)=h(x_2)$

Como $A\cap C=\phi$, $x_1, x_2\in A \vee x_1,x_2\in C \vee x_1\in A\wedge x_2\in C$

Si $x_1,x_2\in A$, $h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ pués f es inyectiva.

(1.0) Si $x_1,x_2\in C$, $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ pués g es inyectiva

Si $x_1\in A\wedge x_2\in C$, $x_1\neq x_2 \Rightarrow h(x_1)\neq h(x_2)$ pués $h(x_1)=f(x_1)\in B$ y $h(x_2)=g(x_2)\in D$ y $B\cap D=\phi$

(1.0) Sigue que $(\forall x_1,x_2\in A\cup C)$ $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ∴ h es inyectiva

ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva

∴ En efecto, sea $y\in B\cup D$, por dem. q' $\exists x\in A\cup C$ tal que $h(x)=y$

Pero $y\in B\cup D \Rightarrow y\in B \veebar y\in D$ pués $B\cap D=\phi$

(1.0) Si $y\in B$, $\exists x\in A$ tal que $y=f(x)=h(x)$ pués f es sobreyectiva.

Si $y\in D$, $\exists x\in C$ tal que $y=g(x)=h(x)$ pués g es sobreyectiva.

(1.0) Sigue que $(\forall y\in B\cup D)(\exists x\in A\cup C)$; $y=h(x)$ ∴ h es sobreyectiva.

Alternativa: OBSERVACION: Tambien se puede argumentar por Imágenes.

$h(A\cup C)=h(A)\cup h(C)$ (propiedad) y $h(A)=f(A)=B$; $h(C)=g(C)=D$ pués f y g son sobreyectivas.

Entonces $h(A\cup C)=B\cup D$, h es sobreyectiva.

iii) Si f y g son biyectivas, demostrar que h es biyectiva y encontrar su inversa.

- Si f y g son biyectivas, f y g son inyectivas y sobreyectivas y por (i) y (ii). h es inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto h es biyectiva.

(1.0) Entonces existe $h^{-1}: B \cup D \to A \cup C$ y debe ser tal que

$$h^{-1} \circ h = id_{A \cup C}$$

En efecto $h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si \ x \in B \\ g^{-1}(x) & si \ x \in D \end{cases}$ $(B \cap D = \phi)$

(1.0) pues $h^{-1} \circ h = \begin{cases} f^{-1} \circ f = id_A \\ g^{-1} \circ g = id_C \end{cases} = id_{A \cup C}$ $(A \cap C = \phi)$

Problema 2

$E \neq \phi$, $A \subseteq E$, $A \neq \phi$ $f\ P(E) \longrightarrow P(E)$; $X \longrightarrow f(X) = X \setminus A$ $g\ P(E) \longrightarrow P(E)$; $X \longrightarrow g(X) = X \cup A$

i) Demostrar que $f \circ g = f \wedge g \circ f = g$

En efecto, $f \circ g, f, g, g \circ f : P(E) \longrightarrow P(E)$, es decir todas

(1.0) tienen igual dominio y codominio.

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(X \cup A) = (X \cup A) \setminus A = (X \cup A) \cap A^c$$

(1.0)

$$= (X \cap A^c) \cup (A \cap A^c) = (X \setminus A) \cup \phi = X \setminus A = f(X)$$

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(X - A) = (X - A) \cup A = (X \cap A^c) \cup A$$

(1.0)

$$= (X \cup A) \cap (A^c \cup A) = (X \cup A) \cap E = X \cup A = g(X)$$

ii) Demostrar que $f^{-1}(\{\phi\}) = P(A)$ (Preimagen)

(1.0) En efecto, sea $X \in f^{-1}(\{\phi\}) \Leftrightarrow f(X) \in \{\phi\} \Leftrightarrow f(X) = \phi$

$$\Leftrightarrow \overbrace{X - A}^{f(X)} = \phi \Leftrightarrow X \subseteq A \Leftrightarrow X \in P(A)$$

(0.5) Sigue que $f^{-1}(\{\phi\}) = P(A)$.

iii) Demostrar que $\forall X \in P(E)$, $f(X) \neq A$

Supongamos por contradicción que $\exists X \in P(E)$; $f(X) = A$

(1.5) es decir $X \setminus A = A \Leftrightarrow X \cap A^c = A$ pero $(X \cap A^c) \subseteq A^c$

Entonces $A \subseteq A^c$ lo que es una contradicción, salvo $A = \phi$ pero $A \neq \phi$

Control 2

P1. Sean A, B dos conjuntos fijos cualquiera. Sea

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) &\longrightarrow \mathcal{P}(A \cup B) \\ (X, Y) &\longmapsto F((X, Y)) = X \cup Y \end{aligned}$$

(a) (2,5 ptos.) Demuestre que F es sobreyectiva.

(b) (2,5 ptos.) Suponga que $A \cap B = \phi$. Demuestre que F es inyectiva.

(c) (1,0 pto.) Suponga ahora que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. Demuestre que F **no** es inyectiva.

P2. (6,0 ptos.) Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$ tales que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva,
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva y
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva.

Demuestre que f, g, h son biyectivas.

Consultas sólo al auxiliar
Justi que cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Álgebra (13-1)

Control 2 - Pauta Problema 1

A, B conjuntos fijos cualquiera y $F: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A \cup B)$
$(X, Y) \longrightarrow F((X,Y)) = X \cup Y$

a) Demostrar que F es sobreyectiva.

Por dem. q' $(\forall C \in \mathcal{P}(A\cup B))(\exists (X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))\ F((X,Y)) = C$

(1.5) En efecto, sean $X = (A \cap C) \subseteq A$ y $Y \in (B \cap C) \subseteq B$ con $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$

Así, $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ y $F((X,Y)) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ por distrib

(1.0) $\Rightarrow F((X,Y)) = (A \cup B) \cap C = C$ pues $C \subseteq A \cup B$

b) Suponga que $A \cap B = \phi$. Demuestre que F es inyectiva.

Sean $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tales que $F((X_1,Y_1)) = F((X_2,Y_2))$

(0.5) $\Longleftrightarrow X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2$ con $X_1, X_2 \subseteq A \wedge Y_1, Y_2 \subseteq B$

$/ \cup B \Rightarrow X_1 \cup \underbrace{Y_1 \cup B}_{B} = X_2 \cup \underbrace{Y_2 \cup B}_{B} \Rightarrow X_1 \cup B = X_2 \cup B$

$/ \cap A \Rightarrow (X_1 \cup B) \cap A = (X_2 \cup B) \cap A \overset{distr}{\Rightarrow} (X_1 \cap A) \cup \overbrace{(B \cap A)}^{\phi} = (X_2 \cap A) \cup \overbrace{(B \cap A)}^{\phi}$

(1.5) $\overset{hipotesis}{\Longrightarrow} (X_1 \cap A) \cup \phi = (X_2 \cap A) \cup \phi \Rightarrow X_1 \cap A = X_2 \cap A$ con $X_1, X_2 \subseteq A$

$\Rightarrow X_1 = X_2$ y analogamente $Y_1 = Y_2 \Rightarrow (X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$

(0.5) Sigue que F es inyectiva.

c) $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ Así $A \cap B \neq \phi \wedge \mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{1\}, \{2\}\}$
$\mathcal{P}(B) = \{\phi, B, \{2\}, \{3\}\}$

(0.3) Tomando $(X_1, Y_1) = (\phi, \{2\}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \wedge (X_2, Y_2) = (\{2\}, \phi) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

donde claramente $(X_1, Y_1) \neq (X_2, Y_2)$, PERO $F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2) = \phi \cup \{2\} = \{2\}$

(0.7) Sigue que F NO ES INYECTIVA

Pauta Problema 2

A, B, C conjuntos no vacíos. Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$ ∧ $h: C \to A$

tales que (1) $h \circ g \circ f$ es inyectiva

(2) $f \circ h \circ g$ es inyectiva

(3) $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva.

Demostrar que f, g y h son biyectivas.

Usando apropiadamente la asociatividad y propiedades de clases se tiene.

Según (2) $(f \circ h) \circ g$ inyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva.

según (3) $g \circ (f \circ h)$ sobreyectiva $\Rightarrow$ g sobreyectiva.

(2.0) $\to$ Se concluye que <u>g es biyectiva</u> y existe g^{-1} biyectiva.

También de (1) $h \circ (g \circ f)$ inyectiva $\Rightarrow$ $g \circ f$ inyectiva.

y de (3) $(g \circ f) \circ h$ sobreyectiva $\Rightarrow$ $g \circ f$ sobreyectiva.

Se concluye que $g \circ f$ es biyectiva

Como g^{-1} es también biyectiva $g^{-1} \circ (g \circ f)$ es biyectiva, pero

(2.0) $\to$ $g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = id_B \circ f = f$ <u>es biyectiva</u>.

Para h hay varias formas, una puede ser.

de (2) $f \circ (h \circ g)$ inyectiva $\Rightarrow$ $h \circ g$ inyectiva y como g^{-1} inyectiva

$\Rightarrow$ $h \circ (g \circ g^{-1})$ inyectiva $\Rightarrow$ $h \circ id_C = h$ es inyectiva.

y de $(g \circ f) \circ h$ sobreyectiva y $(g \circ f)^{-1}$ biyect $\Rightarrow$ sobreyectiva

entonces $\underbrace{[(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f)]}_{id_A} \circ h = id_A \circ h = h$ sobreyectiva.

(2.0) $\to$ Se concluye que <u>h es biyectiva</u>.

Control 2

P1. a) Sean A, B conjuntos no vacíos. Se define en $A \times B$ la función $\varphi : A \times B \to A$ tal que $\varphi(x, y) = x$.

(i) (1,5 ptos.) Demuestre que φ es sobreyectiva.

(ii) (2,5 ptos.) Demuestre φ es biyectiva si y sólo si B tiene sólo un elemento.

b) (2,0 ptos.) Sean E, F conjuntos no vacíos y $f : E \to F$ una función biyectiva. Demuestre que

$$(\forall X \subseteq E),\ f(E \setminus X) = F \setminus f(X).$$

.

P2. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$, $g : B \to A$ y $h : B \to B$ funciones tales que:

- h es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = \mathrm{Id}_A$

(i) (4,0 ptos.) Muestre que f y g son biyectivas.

(ii) (2,0 ptos.) Muestre que $h = \mathrm{Id}_B$.

Consultas sólo al auxiliar de control
Justi que cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Álgebra (2014-01)

Control 2 Pauta Problema 1

a) $A, B \neq \phi$, $\varphi : A \times B \longrightarrow A$; $\varphi(x,y) = x$

i) Dem que φ es sobreyectiva.

En efecto, sea $x \in A$, bastará escoger $(x,y) \in A \times B$ tal que $\varphi(x,y) = x$ por definición de φ

(1.5) Así, $(\forall x \in A)(\exists (x,y) \in A \times B)$ $\varphi(x,y) = x$, es decir φ es sobreyectiva

ii) Dem q' φ es biyectiva ssi $\Longleftrightarrow$ B tiene solo un elemento.

$(\Longrightarrow)$ Sea φ biyectiva, se probó que es sobreyectiva, pero también es inyectiva, es decir $\forall (x_1,y_1)(x_2,y_2) \in A \times B$ $\big(f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

Pero $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \not\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ a no ser

(1.5) que $y_1 = y_2$, es decir $\forall y_1, y_2 \in B$, $y_1 = y_2 \Rightarrow B = \{b\}$ $(y_1 = y_2 = b)$

$(\Longleftarrow)$ $B = \{b\}$, es decir B tiene un solo elemento. Por lo tanto

$\varphi(x_1,b) = \varphi(x_2,b) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1,b) = (x_2,b)$, es decir φ

(1.0) es inyectiva y como es sobreyectiva, es biyectiva.

b) Probaremos las dos inclusiones: $f(E - \bar{X}) \subseteq F - f(\bar{X})$

$(\subseteq)$ Sea $y \in f(E - \bar{X})$ entonces $\exists x \in (E - \bar{X})$ tal que $y = f(x)$.

Como f es inyectiva no puede existir $z \in \bar{X}$ tal que $y = f(z)$ pues si no, $f(z) = f(x) \Rightarrow z = x \rightarrow$!! pues $z \in \bar{X} \wedge x \in (E - \bar{X})$

(1.0) Sigue que $y \notin f(\bar{X})$, es decir $y \in (F - f(\bar{X})) \Rightarrow f(E \setminus \bar{X}) \subseteq F - f(\bar{X})$

$(\supseteq)$ Recíprocamente sea $y \in (F \setminus f(\bar{X}))$, entonces $y \notin f(\bar{X})$ pero como f es sobreyectiva $\exists x \in E$ tal que $y = f(x)$.

Pero x no puede pertenecer a $\bar{X}$ pues en lo contrario $\overset{y}{f(x)} \in f(\bar{X})$

Así, $x \in (E - \bar{X})$ y por lo tanto $y = f(x) \in f(E \setminus \bar{X})$

(1.0) Así $F - f(\bar{X}) \subseteq f(E - \bar{X})$. Se concluye la igualdad.

Pauta Problema 2

$A,B \neq \phi$, $f: A \to B$, $g: B \to A$, $h: B \to B$ funciones

tales que: h es biyectiva, $f \circ g = h$ $\wedge$ $g \circ f = id_A$

a) muestre que f y g son biyectivas

Como $f \circ g = h$ y h es biyectiva, $f \circ g$ es biyectiva

También $g \circ f = id_A$ y id_A es biyectiva y por lo tanto

(1.5) $g \circ f$ es también biyectiva.

Así, por propiedades vistas en clase

(1.0) $f \circ g$ biyectiva $\Rightarrow \begin{cases} f \circ g \text{ inyectiva} \Rightarrow g \text{ inyectiva} \\ f \circ g \text{ sobreyectiva} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva.} \end{cases}$

(1.0) $g \circ f$ biyectiva $\Rightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ g \circ f \text{ sobreyectiva} \Rightarrow g \text{ sobreyectiva.} \end{cases}$

Se concluye f sobreyectiva $\wedge$ f inyectiva $\Rightarrow$ f biyectiva

(0.5) g inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva $\Rightarrow$ g biyectiva

b) muestre que $h = id_B$

Hay varias formas. Todas las funciones son biyectivas y por lo tanto invertibles

Se sabe que $f \circ g = h \Rightarrow g \circ (f \circ g) = g \circ h \xRightarrow{\text{Asociat.}} \underbrace{(g \circ f)}_{id_A} \circ g = g \circ h$

$\Rightarrow id_A \circ g = g \circ h \Rightarrow g = g \circ h \Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ h) = g^{-1} \circ g$

(2.0) $\Rightarrow (g^{-1} \circ g) \circ h = g^{-1} \circ g \Rightarrow id_B \circ h = id_B \Rightarrow h = id_B$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra. MA1101

Control 2

P1. *a)* (3 ptos.) Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo, y $A, B \subseteq \mathcal{U}$.
Sea $f : A \longrightarrow B$ y $C \subseteq A$. Se define $g : C \longrightarrow B$ tal que $g(x) = f(x)\ \forall x \in C$.
Demuestre que $\forall D \subseteq B,\ g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$.

b) (3 ptos.) Sea $\mathcal{F} = \{f : A \longrightarrow A | f \text{ es función}\}$, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones de A en A; y sea $g : A \longrightarrow A$ biyectiva. Se define:

$$\begin{aligned} \varphi :& \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \\ & f \longrightarrow \varphi(f) = g \circ f \end{aligned}$$

Pruebe que φ es biyectiva y calcule φ^{-1}.

P2. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo, y sea $A \subseteq \mathcal{U}$. Se define:

$$\begin{aligned} f :& \mathcal{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) \\ & X \longrightarrow f(X) = X \setminus A \end{aligned}$$

a) (3 ptos.)Si $A \neq \emptyset$ muestre que f no es sobreyectiva.

b) (3 ptos.)Si f es inyectiva $\Rightarrow A = \emptyset$.

Tiempo: 1 hora 15 minutos.

Pauta Problema 2

Sea $\mathcal{U}$ conjunto universo y $A \subseteq \mathcal{U}$. Se define
$$f: \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ por } f(X) = X \setminus A \quad \forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$$

a) Si $A \neq \emptyset$ muestre que f no es sobreyectiva.

Si f fuera sobreyectiva debe cumplirse que

10 $(\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U}))(\exists X \in \mathcal{P}(\mathcal{U}))\ Y = f(X) = X - A$

Pero esto no es posible para $Y \subseteq A$, por ejemplo, pues

$X - A = Y \Rightarrow X \cap A^c = Y$ donde $X \cap A^c \subseteq A^c \wedge Y \subseteq A$

b) Si f inyectiva $\Longrightarrow A = \emptyset$

Supongamos que $A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, a \in A$.

$\{a\} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Sea $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, X puede ser el $\emptyset$.

1) Si $a \in X \Longrightarrow (X - \{a\}) \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$f(X) = f(X - \{a\}) \wedge X \neq X - \{a\}$

luego f NO es inyectiva

2) Si $a \notin X \Longrightarrow (X \cup \{a\}) \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$f(X) = f(X \cup \{a\}) \wedge X \neq X \cup \{a\}$

f no es inyectiva. 3 ptos

Control 2

P1. *a)* Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g, h : B \longrightarrow A$ funciones tales que:
$g \circ f = id_A$, $f \circ h = id_B$

1) (2 ptos.) Demuestre que f es biyectiva.
2) (2 ptos.) Demuestre que $h = g = f^{-1}$
3) (2 ptos) Sea $E \neq \emptyset$ y $\varphi : E \longrightarrow E$ función.
Demuestre que:
$[\forall X \subseteq E, \varphi(X) = X] \Longleftrightarrow \varphi = id_E$

P2. Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Y sean:

$$\begin{aligned} f :& A \times A \longrightarrow A \\ & (x, y) \longrightarrow f(x, y) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :& A \longrightarrow A \times A \\ & x \longrightarrow g(x) = (x, x) \end{aligned}$$

a) (2 ptos.) Demuestre que $f \circ g = id_A$.

b) (2 ptos.) Determine si f, g son funciones inyectivas, sobreyectivas (epiyectivas), biyectivas.

c) (2 ptos.) ¿Es $g \circ f = id_{A \times A}$?

Tiempo: 1 hora 15 minutos.

Introducción al Algebra - Control 2

Pauta Problema 1

a) $f: A \to B$ y $g, h: B \to A$ tales que $g\circ f = id_A \wedge f\circ h = id_B$

i) Demostrar que f es biyectiva

En efecto, $g\circ f$ y $f\circ h$ son identidades y por lo tanto

(0.5) son biyectivas, entonces, por propiedades vistas

$$\left.\begin{array}{l} g\circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ f\circ h \text{ sobreyectiva} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es biyectiva}$$

(1.5)

ii) Probar que $g = h = f^{-1}$

En efecto, sea $f^{-1}: B \to A$ inversa de f.

Composición de $g\circ f = id_A$ con $f^{-1} \Rightarrow (g\circ f)\circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1}$

(1.0) Asociativ $\Rightarrow g\circ \underbrace{(f\circ f^{-1})}_{id_B} = f^{-1} \Rightarrow \underbrace{g\circ id_B}_{g} = f^{-1} \Rightarrow g = f^{-1}$

Analogamente $f\circ h = id_B \overset{f^{-1}\circ /}{\Longrightarrow} f^{-1}\circ(f\circ h) = \underbrace{f^{-1}\circ id_B}_{f^{-1}}$ (Asociativ)

(1.0) $\Rightarrow (f^{-1}\circ f)\circ h = f^{-1} \Rightarrow id_A\circ h = f^{-1} \Rightarrow h = f^{-1}$

b) $E \neq \phi \wedge \varphi: E \to E$. Dem q': $\left[\forall X \subseteq E, \varphi^{-1}(X) = X\right] \Leftrightarrow \varphi = id_E$

$(\Rightarrow)$ $\forall x \in E$ podemos definir $X \subseteq E$ como $X = \{x\}$

(1.0) Por hipótesis $\forall X \subseteq E$, $\varphi^{-1}(X) = X$, entonces $\varphi^{-1}(\{x\}) = \{x\}$

de donde, como $x \in \{x\} \Rightarrow x \in \varphi^{-1}(\{x\}) \Rightarrow \varphi(x) \in \{x\} \Rightarrow \varphi(x) = x \ \forall x$

es decir $\varphi = id_E$

$(\Leftarrow)$ $\varphi^{-1}(X) = \{a \in E \mid \varphi(a) \in X\} \overset{\varphi = id_E}{=} \{a \in E \mid a \in X\} = X$

(1.0) así $\forall X \subseteq E$ $\varphi^{-1}(X) = X$.

Pauta Problema 2

$f : A \times A \longrightarrow A$ y $g : A \longrightarrow A \times A$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = x$ $\quad$ $x \longrightarrow g(x) = (x,x)$

i) Demostrar que $f \circ g = id_A$.

(0.5) En efecto, $f \circ g : A \to A$, $id_A : A \to A$

además $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x,x) = x = id_A(x)$

(1.5) es decir $f \circ g = id_A$

ii) Determinar si f, g son inyect., sobreyec., biyectivas.

Se puede usar la parte (i) donde $f \circ g = id_A$, es decir $f \circ g$ es biyectiva, entonces

$f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow g$ inyectiva

(1.0) $f \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow f$ sobreyectiva

Además g no es sobreyectiva pues los pares $(x,y) \in A \times A$ no tienen preimagen

f no es inyectiva pues, por ejemplo, para $(x,u),(x,v) \in A \times A$

$(x,u) \neq (x,v)$ pero $f(x,u) = x = f(x,v)$

(1.0) Finalmente f y g no son biyectivas.

iii) ¿Es $g \circ f = id_{A \times A}$?

(0.5) $g \circ f : A \times A \to A \to A \times A$ $\wedge$ $id_{A \times A} : A \times A \longrightarrow A \times A$

ambas tienen igual dominio $(A \times A)$ y codominio $(A \times A)$

PERO $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x) = (x,x) \neq id_{A \times A}(x,y) = (x,y)$

(1.5) Sigue que $g \circ f \neq id_{A \times A}$

Control 2

P1. *a)* 1) (3 ptos.) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x + y = n\}$$

Demuestre que :

$$\mathcal{C} = \{D_n | n \in \mathbb{N}\}$$

es una partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Observación: Es importante para resolver el ejercicio que tome: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

Recuerdo: Decimos que $\mathcal{C}$ es una partición del conjunto A si las siguientes tres condiciones se cumplen:

- $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$.
- Los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos, es decir: $\forall C, C' \in \mathcal{C}$, si $C \neq C'$ entonces $C \cap C' = \emptyset$.
- $\mathcal{C}$ cubre A, es decir: $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

2) (3 ptos.) Demuestre que si A, B son conjuntos cualquiera, entonces se cumple:

$$\{[(A \cup B) \setminus (A \triangle B)] \cup [(A \cup B) \setminus A]\} = B$$

P2. Sea E un conjunto de referencia no vacío y $B_0 \subseteq E$ fijo.
Considere la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : &\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ &X \longrightarrow \mathcal{F}(X) = (X \setminus B_0, X \cap B_0) \end{aligned}$$

a) (0,5 ptos.) Demuestre primero que $X = (X \setminus B_0) \cup (X \cap B_0)$

b) (3 ptos.) Demuestre que la función, $\mathcal{F}$ es inyectiva.
Indicación: Puede ser útil utilizar la parte (a).

c) (2,5 ptos.) Demuestre que la función, $\mathcal{F}$ NO es epiyectiva.

Tiempo: 1 hora 30 minutos.

Introducción al Álgebra (MA1101)

Control 2 Pauta Problema 1

i) $\mathcal{C} = \{D_n / n \in \mathbb{N}\}$ donde $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} / x+y=n\}$

Se pide demostrar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ es una partición de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

En efecto a) $\forall D_n \in \mathcal{C}, D_n \neq \phi$ pues al menos $(0,n)$ ó $(n,0)$

(0.5) son elementos de D_n con $0+n = 0 = n+0$.

b) $\mathcal{C}$ cubre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, es decir $\bigcup_{D_n\in\mathcal{C}} D_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

En efecto, sea $(x,y) \in \bigcup_{D_n\in\mathcal{C}} D_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, (x,y) \in D_{n_0} \xRightarrow{\text{Def de } D_n}$

$(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Entonces $\bigcup_{D_n\in\mathcal{C}} D_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Recíprocamente, sea $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Rightarrow x+y = n_0$, algún $n_0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (x,y) \in D_{n_0} \Rightarrow (x,y) \in \bigcup_{D_n\in\mathcal{C}} D_n$. Entonces $\bigcup_{D_n\in\mathcal{C}} D_n \supseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Como (x,y) es arbitrario, por las implicancias anteriores se

(1.5) concluye que $\bigcup_{D_n\in\mathcal{C}} D_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

c) $\forall D_n, D_p \in \mathcal{C}$, si $n \neq p \Rightarrow D_n \cap D_p = \phi$

En efecto, si suponemos que no es así, $\exists (x,y) \in D_n \cap D_p$

(1.0) $\Rightarrow x+y = n \wedge x+y = p \Rightarrow n = p$ que es contradicción.

ii) Demostrar $\{[(A\cup B)\setminus(A\Delta B)] \cup [(A\cup B)\setminus A]\} = B$

$[(A\cup B)\setminus(A\Delta B)] \cup [(A\cup B)\setminus A] \overset{\text{def}}{=} [(A\cup B)\cap(A\Delta B)^c] \cup [(A\cup B)\cap A^c] =$

(1.0) $\overset{\text{distrib}}{=} (A\cup B)\cap[(A\Delta B)^c \cup A^c] \overset{\text{Morgan}}{=} (A\cup B)\cap[(A\Delta B)\cap A]^c \overset{\text{def de }\Delta}{=}$

$= (A\cup B)\cap[\{(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\}\cap A]^c \overset{\text{distrib}}{=} (A\cup B)\cap[\underbrace{(A\cap A\cap B^c)}_{A\cap B^c}\cup\underbrace{(B\cap A\cap A^c)}_{\phi}]^c =$

(2.0) $= (A\cup B)\cap[A\cap B^c]^c \overset{\text{Morgan}}{=} (A\cup B)\cap(A^c\cup B) \overset{\text{distrib}}{=} (A\cap A^c)\cup B = \phi\cup B = B$

Pauta Problema 2

E conjunto de referencia, $B_0 \subset E$ fijo

$$f : P(E) \longrightarrow P(E) \times P(E)$$
$$X \longrightarrow (X \setminus B_0, X \cap B_0)$$

i) Probar que $X = (X \setminus B_0) \cup (X \cap B_0)$

En efecto $(X \setminus B_0) \cup (X \cap B_0) \overset{\text{Def} \setminus}{=} (X \cap B_0^c) \cup (X \cap B_0)$

0.5 $\overset{\text{distrib.}}{=} X \cap \underbrace{(B_0^c \cup B_0)}_{E} = X \cap E = X$

ii) Demostrar que f es inyectiva.

En efecto, sean $X_1, X_2 \in P(E)$ tales que $f(X_1) = f(X_2)$

$\Longrightarrow (X_1 \setminus B_0, X_1 \cap B_0) = (X_2 \setminus B_0, X_2 \cap B_0)$

1.0 $\overset{\text{Pares iguales}}{\Longrightarrow} X_1 \setminus B_0 = X_2 \setminus B_0 \wedge X_1 \cap B_0 = X_2 \cap B_0$

$\overset{\text{Uniendo}}{\Longrightarrow} \underbrace{(X_1 \setminus B_0) \cup (X_1 \cap B_0)}_{} = \underbrace{(X_2 \setminus B_0) \cup (X_2 \cap B_0)}_{}$

$\Longrightarrow$ Por (i) $X_1 = X_2$

2.0 Lo que confirma que f es inyectiva.

iii) Demostrar que f NO es epiyectiva.

$f(X) = (X \setminus B_0, X \cap B_0) = (X \cap B_0^c, X \cap B_0)$

1.0 Puesto que $X \cap B_0^c \subseteq B_0^c \wedge X \cap B_0 \subseteq B_0 \quad \forall X \in P(E)$

bastará tomar $(A, B) \in P(E) \times P(E)$ tal que $B_0^c \subset A$ y $B_0 \subset B$

1.5 y en tal caso $\forall X \in P(E) \quad f(X) \neq (A, B) \in P(E) \times P(E)$

Por ejemplo $A = B = E \Rightarrow \forall X \in E \quad f(X) \neq (E, E)$. $\boxed{f \text{ No es Epiy.}}$

Control 2

P1. Sean E, F, A y B conjuntos tales que $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$.

I) (3.0 ptos.) Demuestre que

$$(E \times F) \setminus (A \times B) = \Big((E \setminus A) \times F\Big) \cup \Big(E \times (F \setminus B)\Big).$$

II) (3.0 ptos) Demuestre que

$$\mathcal{P}(E \setminus A) \subseteq \{\emptyset\} \cup (\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}(A))$$

y exhiba un contraejemplo para la igualdad.

P2. Sean A, B y C conjuntos.

I) (3.0 ptos.) Demuestre o exhiba un contraejemplo de la siguiente igualdad

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (A \cap C).$$

II) (3.0 ptos.) Demuestre que

$$C \subseteq A \cup B^c \Rightarrow B \subseteq A \cup C^c.$$

Tiempo: 1 hora 15 minutos.

Introducción al Álgebra (MA1101)

Control 2 Pauta Problema 1

I) $A \subseteq E \wedge B \subseteq F$. Demostrar que

$$(E\times F)\setminus(A\times B) = ((E\setminus A)\times F)\cup(E\times(F-B))$$

Sea $(x,y)\in E\times F$ arbitrario, Entonces.

$(x,y)\in\{(E\times F)\setminus(A\times B)\} \iff (x,y)\in(E\times F)\wedge(x,y)\notin(A\times B)$

$\iff (x\in E\wedge y\in F)\wedge \overline{(x,y)\in A\times B}$ Definición

$\iff (x\in E\wedge y\in F)\wedge \overline{x\in A\wedge y\in B}$ Definición

$\iff (x\in E\wedge y\in F)\wedge(x\notin A\vee y\notin B)$ Morgan

(1) $\iff (x\in E\wedge y\in F\wedge x\notin A)\vee(x\in E\wedge y\in F\wedge y\notin B)$ Distributiv

$\iff (x\in(E\setminus A)\wedge y\in F)\vee(x\in E\wedge y\in(F-B))$ Conmut. de $\wedge$ y Definición.

$\iff (x,y)\in((E\setminus A)\times F)\vee(x,y)\in(E\times(F-B))$ Definición

$\iff (x,y)\in((E-A)\times F)\cup(E\times(F-B))$ Definición de $\cup$.

(1.5) Como (x,y) es arbitrario $(E\times F)\setminus(A\times B)=((E-A)\times F)\cup(E\times(F-B))$

II) Demostrar que $P(E\setminus A)\subseteq\{\phi\}\cup(P(E)\setminus P(A))$

Sea $X\subseteq E$ arbitrario. Entonces

$X\in P(E\setminus A)\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\in P(E\setminus A))$ $(\phi\in P(E\setminus A))$

$\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\subseteq(E\setminus A))\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\subseteq(E\cap A^c))$

(1) $\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\subseteq E\wedge X\subseteq A^c)$ Propiedad

$\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\in P(E)\wedge X\in P(A^c))$ Def de Conjunto Potencia

$\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\in P(E)\wedge X\notin P(A))\iff(X\in\{\phi\})\vee(X\in(P(E)-P(A)))$

(1.5) $\Rightarrow X\in[\{\phi\}\cup(P(E)\setminus P(A))]$. Entonces $P(E\setminus A)\subseteq\{\phi\}\cup(P(E)\setminus P(A))$

Contraejemplo para la igualdad: $E=\{1,2\}, A=\{1\}, E\setminus A=\{2\}$

Así: $P(E\setminus A)=\{\phi,\{2\}\}$, pero $\{\phi\}\cup(P(E)\setminus P(A))=$

(0.5) $=\{\phi\}\cup(\{\phi,\{1,2\},\{1\},\{2\}\}\setminus\{\phi,\{1\}\})=\{\phi,\{2\},\{1,2\}\}$

$\neq\{\phi,\{2\}\}$

P1 II :

Sea $X \in \mathcal{P}(E \setminus A) \iff$

$X \subseteq E \setminus A \iff X \subseteq E \cap A^c$

$\iff X \subseteq E \wedge X \subseteq A^c$ 1.0

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(E) \wedge X \in \mathcal{P}(A^c)$

$\iff X \in \mathcal{P}(E) \wedge (X = \emptyset \vee X \notin \mathcal{P}(A))$

$\iff X = \emptyset \wedge X \in \mathcal{P}(E) \vee X \in \mathcal{P}(E) \wedge X \notin \mathcal{P}(A)$

$\iff X = \emptyset \vee (X \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}(A))$ 1,5

¡Cuidado! Para el contraejemplo
Basta tomar un conjunto X tq:

$\left.\begin{array}{l} X \cap A \neq \emptyset \\ X \cap A^c \neq \emptyset \end{array}\right\}$ luego $X \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}(A)$

$X \notin \mathcal{P}(E \setminus A)$

0,5

Pauta Problema 2

Sean A, B, C Conjuntos.

I) Demuestre que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (A \cap C)$ ó de un contraejemplo si no hay igualdad.

Desarrollando el segundo miembro se tiene.

$$(A - B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C)^c \quad \text{Definición}$$
$$= (A \cap B^c) \cap (A^c \cup C^c) \quad \text{Morgen}$$
$$= (A \cap B^c \cap A^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \quad \text{Distributividad}$$

1.0

$$= (\underbrace{A \cap A^c}_{\phi} \cap B^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) = \phi \cup (A \cap B^c \cap C^c) \quad \text{Commut. y } A \cap A^c = \phi$$
$$= (A \cap B^c) \cap C^c \quad \text{Asociatividad y Definición}$$
$$= (A \setminus B) \setminus C = 1^{er} \text{ Miembro}$$

2.0

Así la igualdad es válida y no es necesario contraejemplo

II) Demuestre que si $C \subseteq A \cup B^c$ entonces $B \subseteq A \cup C^c$

Se tiene por hipótesis $C \subseteq A \cup B^c$ y tomando complementos $(A \cup B^c)^c \subseteq C^c \Rightarrow A^c \cap (B^c)^c \subseteq C^c$ Morgen

1.0

$$\Rightarrow A^c \cap B \subseteq C^c \; / \underset{\text{union en } A}{\cup A} \Rightarrow (A^c \cap B) \cup A \subseteq A \cup C^c$$
$$\Rightarrow (\underbrace{A^c \cup A}_{\mathcal{U}}) \cap (B \cup A) \subseteq A \cup C^c \Rightarrow \underbrace{\mathcal{U} \cap (B \cup A)}_{B \cup A} \subseteq A \cup C^c$$
$$\Rightarrow B \cup A \subseteq A \cup C^c \quad \text{Pero } B \subseteq B \cup A \text{, entonces}$$

2.0

por transitividad $B \subseteq B \cup A \subseteq A \cup C^c \Rightarrow B \subseteq A \cup C^c$