Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
11 de mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 1

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$, $(x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

(c) Usando **(b)**, demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \neq 0$, $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$.

(d) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$.

Solución:

(a) Desarrollemos directamente la expresión de la izquierda:

$$\begin{aligned}
(x+y)(x^{-1}y^{-1}) &= x(x^{-1}y^{-1}) + y(x^{-1}y^{-1}) && \text{(Distributividad)}\\
&= (xx^{-1})y^{-1} + y(x^{-1}y^{-1}) && \text{(Asociatividad de } \cdot)\\
&= (xx^{-1})y^{-1} + y(y^{-1}x^{-1}) && \text{(Conmutatividad de } \cdot)\\
&= (xx^{-1})y^{-1} + (yy^{-1})x^{-1} && \text{(Asociatividad de } \cdot)\\
&= 1y^{-1} + 1x^{-1} && \text{(Inverso Multiplicativo)}\\
&= y^{-1} + x^{-1} && \text{(Neutro Multiplicativo)}\\
&= x^{-1} + y^{-1}. \blacksquare && \text{(Conmutatividad de } +)
\end{aligned}$$

(b) Para demostrar esta igualdad, probaremos primero que $y^{-1}x^{-1}$ es inverso multiplicativo de xy, en efecto:

$$\begin{aligned}
(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x(yy^{-1})x^{-1} && \text{(Asociatividad de } \cdot)\\
&= x \cdot 1 \cdot x^{-1} && \text{(Inverso Multiplicativo)}\\
&= x \cdot x^{-1} && \text{(Neutro Multiplicativo)}\\
&= 1 && \text{(Inverso Multiplicativo)}
\end{aligned}$$

Finalmente, recordamos que por un teorema visto en clases, sabemos que el inverso multiplicativo es único, concluyendo así que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.$\blacksquare$

(c) Desarrollaremos el sector derecho de la igualdad propuesta:

$$\begin{aligned}
(ad+cb)(bd)^{-1} &= (ad+cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Parte (b))}\\
&= ad(d^{-1}b^{-1}) + cb(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Distributividad)}\\
&= a(dd^{-1})b^{-1} + cb(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Asociatividad de } \cdot)\\
&= a(dd^{-1})b^{-1} + cb(b^{-1}d^{-1}) && \text{(Conmutatividad de } \cdot)\\
&= a(dd^{-1})b^{-1} + c(bb^{-1})d^{-1} && \text{(Asociatividad de } \cdot)\\
&= a(1)b^{-1} + c(1)d^{-1} && \text{(Inverso Multiplicativo)}\\
&= ab^{-1} + cd^{-1}. \blacksquare && \text{(Neutro Multiplicativo)}
\end{aligned}$$

(d) Notemos que $a^2 = 0 \Leftrightarrow a \cdot a = 0$. En cátedra vimos que:

$$p \cdot q = 0 \Rightarrow p = 0 \vee q = 0,$$

propiedad que se demuestra de la siguiente forma: suponiendo inicialmente que $p \neq 0$, podemos obtener el valor de q multiplicando ambos lados de la expresión por p^{-1}, obteniendo así que $q = 0$ (para concluir esto, falta probar que $a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, lo que se deja de ejercicio para el lector). Análogamente, suponiendo el caso $q \neq 0$, se obtiene $p = 0$, y queda demostrada la propiedad. Así, aplicándola en este caso:

$$a^2 = a \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 0 \Rightarrow a = 0. \blacksquare$$

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**)

(a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

(b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-(cb)) = 0$ entonces

$$[(a + b)d] + [-((c + d)b)] = 0.$$

(c) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

Solución:

(a) En efecto:

$$\begin{aligned}
(x + y) + [(-x) + (-y)] &= x + [y + (-x)] + (-y) && \text{(Asociatividad de +)}\\
&= x + [(-x) + y] + (-y) && \text{(Conmutatividad de +)}\\
&= [x + (-x)] + [y + (-y)] && \text{(Asociatividad de +)}\\
&= 0 + 0 && \text{(Inverso Aditivo)}\\
&= 0. \blacksquare && \text{(Neutro Aditivo)}
\end{aligned}$$

(b) Calculemos directamente:

$$\begin{aligned}
[(a + b)d] + [-((c + d)b)] &= ad + bd + [-(bc + bd)] && \text{(Distributividad)}\\
&= ad + bd + [(-bc) + (-bd)] && \text{(Parte (a))}\\
&= ad + bd + [(-bd) + (-bc)] && \text{(Conmutatividad de +)}\\
&= ad + [bd + (-bd)] + (-bc) && \text{(Asociatividad de +)}\\
&= ad + 0 + (-bc) && \text{(Inverso Aditivo)}\\
&= ad + (-bc) && \text{(Neutro Aditivo)}\\
&= 0. \blacksquare && \text{(Hipótesis)}
\end{aligned}$$

(c) Tenemos dos posibles formas de demostrar esto, una es verificar que $a^{-1} + (-a)^{-1} = 0$, y la otra es mostrar que $(-a) \cdot -(a^{-1}) = 1$. Ambas demostraciones, junto a la unicidad de los inversos aditivo y multiplicativo respectivamente, permiten concluir lo pedido.
Aquí haremos la demostración ocupando la segunda opción; en efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot -(a^{-1}) &= (-1 \cdot a) \cdot -(1 \cdot a^{-1}) && \text{(Neutro Multiplicativo)}\\
&= -1 \cdot (a \cdot -1) \cdot a^{-1} && \text{(Asociatividad de $\cdot$)}\\
&= -1 \cdot (-1 \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{(Conmutatividad de $\cdot$)}\\
&= (-1 \cdot -1) \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{(Asociatividad de $\cdot$)}\\
&= (-1 \cdot -1) \cdot (1) && \text{(Inverso Multiplicativo)}\\
&= (-1 \cdot -1) && \text{(Neutro Multiplicativo)}\\
&= 1 && \text{(Propiedad $(*)$)}
\end{aligned}$$

Para que nuestra respuesta sea completamente correcta, debemos probar la propiedad $(*)$, vale decir, debemos demostrar que $-1 \cdot -1 = 1$. Consideremos la siguiente suma:

$$
\begin{aligned}
(-1 \cdot -1) + (-1) &= (-1 \cdot -1) + (-1) \cdot 1 && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\
&= (-1)[(-1) + 1] && \text{(Distributividad)} \\
&= (-1) \cdot 0 && \text{(Inverso Aditivo)} \\
&= 0. \blacksquare && \text{(Propiedad } (\star))
\end{aligned}
$$

Donde la propiedad $(\star)$, es la que se dejó propuesta para el lector en **P1.(d)**. Así, nuevamente recurriendo a la unicidad del inverso aditivo, se llega a que $-1 \cdot -1 = 1$, lo que comprueba la veracidad de la propiedad que enunciamos.
Demostrada $(*)$, la unicidad del inverso multiplicativo implica que $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.$\blacksquare$

P3. Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, $z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; t.q. \;\; x = \lambda w, \;\; y = \lambda z.$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo de la implicancia permite deducir que $x^2 z^2 + y^2 w^2 = 2xwyz$. Luego, vea que esto último implica que $xz = yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

Solución:
Comencemos desarrollando el sector izquierdo de la implicancia:

$$
\begin{aligned}
(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) &\Leftrightarrow x^2w^2 + 2xwyz + y^2z^2 = x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2 \\
&\Leftrightarrow 2xwyz = x^2z^2 + y^2w^2 \\
&\Leftrightarrow x^2z^2 - 2xwyz + y^2w^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (xz - yw)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow xz - yw = 0 \\
&\Leftrightarrow xz = yw \qquad (1) \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{w} = \frac{y}{z} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Finalmente, de la expresión (1), podemos despejar: $x = \frac{y}{z} w$, $y = \frac{x}{w} z$, y eligiendo $\lambda = \frac{x}{w} = \frac{y}{z}$, por lo encontrado en (2), se concluye.$\blacksquare$

P4. Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $3 \in C$.

(A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

(A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

(A4) $7 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

(a) $1 \notin C$.

(b) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 2y + 4 \in C$.

(c) Si $x, y \in C$, entonces $4 - x - y \notin C$.

(d) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $(y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C)$.

(e) No existe $x \in C$ tal que $3(2x - 1) = 39$.

Solución:

(a) Razonemos por absurdo. Supongamos que sí pertenece, entonces, considerando $x = y = 1$ en **(A2)**, concluimos que $4 \in C$. Además, tomando $x = 4$ e $y = 3$, aplicando **(A3)**, obtenemos que $7 \in C$, lo que consiste una contradicción con **(A4)**. Por lo tanto, $1 \notin C$.$\blacksquare$

(b) Como $x \in C$, **(A2)** nos indica que $3x + 1 \in C$. Por otro lado, como $y \in C$, **(A3)** nos permite concluir que $y + y = 2y \in C$. Consideremos ahora $u = 3x + 1$, $v = 2y$, ambos elementos pertenecientes a C. Nuevamente aplicando **(A3)**, $u + v = 3x + 2y + 1 \in C$. Finalmente, aplicando otra vez **(A3)** con $w = 3x + 2y + 1$ y $z = 3$ (que pertenece a C por **(A1)**), se concluye que $3x + 2y + 4 \in C$.$\blacksquare$

(c) Supongamos que $4 - x - y \in C$, trabajando un poco la expresión, tenemos que:

$$4 - x - y = 4 - (x + y) = 4 - z,$$

con $z \in C$, ya que $x, y \in C$. Claramente, si consideráramos $z = 3$, esto implicaría que $1 \in C$, lo que es una contradicción con lo probado en **(a)**. Concluimos así, que $4 - x - y \notin C$.$\blacksquare$

(d) Notemos que **(b)**, como proposición lógica, equivale a:

$$x \in C \wedge y \in C \Rightarrow 3x + 2y + 4 \in C.$$

Considerando su contrarrecíproca, obtenemos lo siguiente:

$$3x + 2y + 4 \notin C \Rightarrow x \notin C \vee y \notin C.$$

Siendo así, y notando que $3y + z + 4 = 3y + 2 \cdot \frac{z}{2} + 4$, al aplicar la contrarrecíproca recién presentada, se concluye que $y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C$.$\blacksquare$

(e) Resolviendo la ecuación:

$$3(2x - 1) = 39 \Leftrightarrow 2x - 1 = 13 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7.$$

Se deja como ejercicio para el lector, detallar todos los axiomas usados en esta resolución. Finalmente, notamos que **(A4)** indica que $7 \notin C$, por lo tanto, concluimos que no existe solución en C para la ecuación planteada.$\blacksquare$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
13 de mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 2

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. **(a)** Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0,\ (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4.$$

Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

(b) **i)** Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Hint: Analice el producto $(x-1)^2(x+2)$.

ii) Demuestre que, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

Hint: Utilice la parte anterior.

Solución:

(a) Para demostrar, ocuparemos la desigualdad $x^2+y^2 \geq 2xy$ (se deja como ejercicio para el lector demostrarla, o bien recordar su demostración vista en clases), que se cumple $\forall x, y \in \mathbb{R}$. La idea es tomar una de las dos componentes de la desigualdad, y llegar a la otra. Partiendo por el lado izquierdo, se tiene:

$$\begin{aligned}
(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) &= (x+y)(x^{-1}+y^{-1})(xy)(xy)^{-1} \\
&= (x+y)(x^{-1}xy + y^{-1}xy)(xy)^{-1} \\
&= (x+y)(y+x)(xy)^{-1} \\
&= (x+y)^2(xy)^{-1} \\
&= (x^2+2xy+y^2)(xy)^{-1} \\
&= (x^2+y^2+2xy)(xy)^{-1} \\
&\geq (2xy+2xy)(xy)^{-1} && \text{(Desigualdad Mencionada)} \\
&= 4(xy)(xy)^{-1} = 4. \blacksquare
\end{aligned}$$

(b) **i)** Siguiendo el hint, notemos que $(x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, sigue siéndolo para $x > 0$. Además, $(x+2) > 0$ en estas circunstancias. Así, podemos concluir que

$$(x-1)^2(x+2) \geq 0,\ \forall x > 0.$$

Desarrollando esta desigualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2(x+2) \geq 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2-2x+1)(x+2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3-3x+2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3-3x+2+3x \geq 0+3x && \text{(Propiedad } (\star)) \\
&\Leftrightarrow x^3+2 \geq 3x \\
&\Leftrightarrow x^2+\frac{2}{x} \geq 3. \blacksquare && \text{(Propiedad } (*))
\end{aligned}$$

Demostración en la que se ocuparon las siguientes propiedades:

$(\star)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ x \geq y \Rightarrow x+a \geq y+a$

$(*)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall a > 0,\ x \geq y \Rightarrow \frac{x}{a} \geq \frac{y}{a}$

ii) Lo encontrado en la parte anterior vale $\forall x > 0$, consideremos entonces x de la forma $x = \frac{a}{b}$, con $a, b > 0$. Reemplazando, obtenemos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{2}{\frac{a}{b}} \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} + 2\frac{b}{a} \geq 3 \qquad // \cdot ab^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2. \blacksquare$$

P2. **(a)** Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

i) Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B.

ii) Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

(b) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x + |x-2||} < \frac{1}{2}.$$

(c) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 + 3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1 + x^2|.$$

(d) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1.$$

(e) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 2x| + x|x+3| \geq 3.$$

Solución:

(a) **i)** Comencemos buscando A, notemos que los puntos críticos de esta inecuación son $x = 0$ y $x = 1$. Siendo así, consideremos los siguientes intervalos, y estudiemos la inecuación en cada uno de ellos:

- $x \in (-\infty, 0]$

$$|x| \leq |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq -x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación en este intervalo es el conjunto definido por $A_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$.

- $x \in (0, 1]$

$$|x| \leq |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$$

Lo que implica que aquí, la solución es $A_2 = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap (0, 1] = (0, \frac{1}{2}]$

- $x \in (1, \infty)$

$$|x| \leq |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq -1$$

Lo que tiene como conjunto solución a $A_3 = \phi \cap (1, \infty) = \phi$
Finalmente, la solución global de la inecuación es $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (-\infty, \frac{1}{2}]$.

Buscando ahora al conjunto B, comencemos notando que el único punto crítico de la inecuación es $x = \frac{1}{2}$. Así, separemos el estudio en los siguientes intervalos:

- $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} |4x-2| > x(1-2x) &\Leftrightarrow 2-4x > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2(1-2x) > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2 > x \end{aligned}$$

  Donde el último paso es válido, ya que $1-2x > 0$ en el intervalo estudiado. Así, la solución encontrada es $B_1 = (-\infty, 2) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2})$.

- $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

$$\begin{aligned} |4x-2| > x(1-2x) &\Leftrightarrow 4x-2 > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2(2x-1) > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2(2x-1) > -x(2x-1) \\ &\Leftrightarrow 2 > -x \\ &\Leftrightarrow -2 < x \end{aligned}$$

  Notar que $2x-1 > 0$ en este intervalo, por lo que pudimos cancelar el término sin dar vuelta la desigualdad. Así, obtenemos $B_2 = (-2, \infty) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)$.
  Descartamos la posibilidad $x = \frac{1}{2}$, ya que de ser así, obtendríamos $0 > 0$, lo que jamás es cierto. Se concluye que $B = B_1 \cup B_2 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

ii) Directamente, tenemos:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cup \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = \mathbb{R}. \\ A \cap B &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = (-\infty, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

(b) Comencemos reduciendo el problema, dejando sólo una fracción:

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} - \frac{1}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2|x-2|+2|2x+11|-(x-2)|x+|x-2||}{2(x-2)|x+|x-2||} < 0 \end{aligned}$$

Notemos ahora que los puntos críticos de la inecuación son $x = 2$, $x = \frac{-11}{2}$. Siendo así, estudiémosla en los siguientes intervalos:

- $x \in (-\infty, \frac{-11}{2})$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2(2-x)+2(-2x-11)-(x-2)|x+2-x|}{2(x-2)|x-x+2|} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4-2x-4x-22+4-2x}{4x-8} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-8x-14}{4x-8} < 0 \\ &\Leftrightarrow -8x-14 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

  Donde se impuso que el numerador fuera positivo, ya que el denominador es siempre negativo en el intervalo estudiado.
  Se concluye que la solución aquí es $S_1 = (-\infty, \frac{-7}{4}) \cap (-\infty, \frac{-11}{2}) = (-\infty, \frac{-11}{2})$.

- $x \in (\frac{-11}{2}, 2)$

$$\begin{aligned}
\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(2-x)+2(2x+11)-(x-2)|x-x+2|}{2(x-2)|x-x+2||} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4-2x+4x+22+4-2x}{4x-8} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{30}{4x-8} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 30 > 0
\end{aligned}$$

  De donde concluimos que $S_2 = \mathbb{R} \cap (\frac{-11}{2}, 2) = (\frac{-11}{2}, 2)$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned}
\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(x-2)+2(2x+11)-(x-2)(2x-2)}{2(x-2)(2x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2x-4+4x+22-2x^2+2x+4x-4}{4(x-2)(x-1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2x^2+12x+22 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-6x-7 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-7)(x+1) > 0
\end{aligned}$$

  De donde se concluye que $S_3 = [(-\infty, -1) \cup (7, \infty)] \cap (2, \infty) = (7, \infty)$.
  Notemos que $x = 2$ indefine la fracción, por lo que no puede ser incluido en la solución final, y tenemos el caso contrario para $x = \frac{-11}{2}$ (ejercicio para el lector verificarlo).

  Así, la solución global es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \{\frac{-11}{2}\} = (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$.

(c) Al ver la inecuación propuesta, notamos que $|1+x^2| = 1+x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2| \quad &\Leftrightarrow \quad |x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7+1+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad |x^2+3x| + x|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad |x||x+3| + x|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad (|x|+x)|x+3| \geq 8
\end{aligned}$$

Inecuación que tiene como puntos críticos a $x = 0$, $x = -3$.

- $x \in (-\infty, -3)$

$$(|x|+x)|x+3| \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq 8$$

  Lo que no tiene solución en este intervalo, vale decir, $S_1 = \phi \cap (-\infty, -3) = \phi$.

- $x \in (-3, 0)$

$$(|x|+x)|x+3| \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq 8$$

  Lo que tampoco tiene solución, vale decir, $S_2 = \phi \cap (-3, 0) = \phi$.

- $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
(|x|+x)|x+3| \geq 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(x+3) \geq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2+6x-8 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+4)(x-1) \geq 0
\end{aligned}$$

  Intervalo en el que sí encontramos solución, y es $S_3 = \{(-\infty, -4] \cup [1, \infty)\} \cap (0, \infty) = [1, \infty)$.

De esta forma, y verificando que ningún punto crítico puede ser incluido, se concluye que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, \infty)$.

(d) Reescribamos la inecuación planteada, de la siguiente forma:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x-1||x-1|}{|x-1||x-2|} \le 1$$

Escrito así, podemos concluir en forma automática que x debe ser distinto de 1 y de 2, por lo que podemos simplificar la expresión, y concluir que nuestro problema es equivalente a:

$$|x-1| \le |x-2|,$$

inecuación que tiene como puntos críticos a $x = 1$ y $x = 2$. Realizando el análisis ya conocido:

- $x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned} |x-1| \le |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad 1-x \le 2-x \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \le 2 \end{aligned}$$

  Obtenemos que el conjunto solución es $S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 1)$.

- $x \in (1, 2)$

$$\begin{aligned} |x-1| \le |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad x-1 \le 2-x \\ &\Leftrightarrow \quad 2x \le 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \le \frac{3}{2} \end{aligned}$$

  Aquí, las soluciones están en $S_2 = (-\infty, \frac{3}{2}] \cap (1, 2) = (1, \frac{3}{2}]$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} |x-1| \le |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad x-1 \le x-2 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \le -2 \end{aligned}$$

  Se concluye que $S_3 = \phi \cap (2, \infty) = \phi$.

Finalmente, como ya fueron descartados los puntos críticos, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{1\}$.

(e) Reescribamos la inecuación de la siguiente forma:

$$|x^2-2x| + x|x+3| \ge 3 \Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \ge 3.$$

Así, observamos que los puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$. Aplicando el método conocido para resolver:

- $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \ge 3 \quad &\Leftrightarrow \quad -x(2-x) + x(-x-3) \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x + x^2 - x^2 - 3x \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -5x \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \le -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

  Así, $S_1 = (-\infty, -\frac{3}{5}] \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$.

- $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \ge 3 \quad &\Leftrightarrow \quad -x(2-x) + x(x+3) \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x + x^2 + x^2 + 3x \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 3 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x + \frac{3}{2})(x-1) \ge 0 \end{aligned}$$

  De esta forma, el conjunto solución es $S_2 = \{(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\} \cap (-3, 0) = (-3, -\frac{3}{2}]$.

- $x \in (0, 2)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(2-x) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x - x^2 + x^2 + 3x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 5x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Concluimos que $S_3 = [\frac{3}{5}, \infty) \cap (0, 2) = [\frac{3}{5}, 2)$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + x^2 + 3x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x-1) \geq 0 \end{aligned}$$

Llegando así, a $S_4 = \{(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\} \cap (2, \infty) = (2, \infty)$.

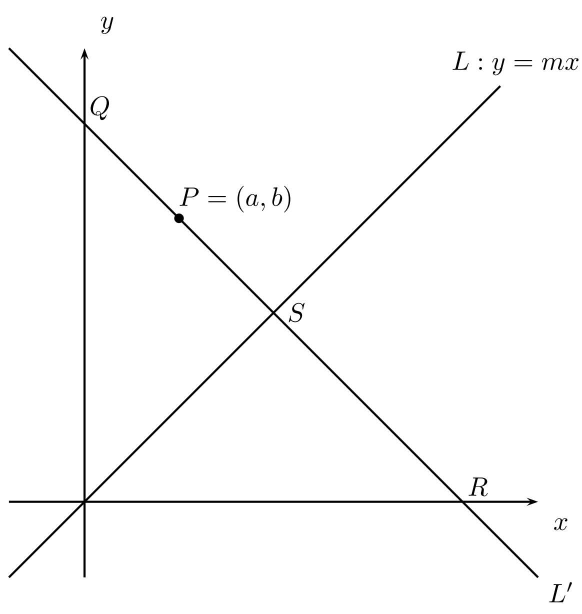
Analizando los puntos críticos de forma separada, notamos que debemos agregar a las soluciones los valores $x = -3$ y $x = 2$, obteniendo la solución global:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{-3, 2\} = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{5}, \infty).$$

Semana 3

P1. Dado el punto P de coordenadas (a, b) y la recta L de ecuación $y = mx$, determinar la ecuación de la recta que pasa por P y tal que el trazo que queda determinado por la intersección de ella con los ejes, queda dimidiado por L.

Solución



Sea $m_{L'}$ la pendiente de L', como $(a, b) \in L'$, se tiene que

$$(y - b) = m_{L'}(x - a)$$

Calculemos ahora las coordenadas de Q y de R.

(i)

$$x = 0 \quad y = b - m_{L'}a \quad Q = (0, b - m_{L'}a)$$

(ii)

$$y = 0 \quad x = a - \frac{b}{m_{L'}} \quad R = (a - \frac{b}{m_{L'}}, 0)$$

Calculemos S:
S esta sobre L y L', luego debe satisfacer:

$$y = mx$$
$$(y-b) = m_{L'}(x-a)$$

Resolviendo este sistema se encuentra que

$$S = \left(\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}}, m\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}}\right)$$

Ahora si L dimidia a QR, necesariamente S será el punto medio de QR. entonces

$$\frac{Q+R}{2} = S$$

luego

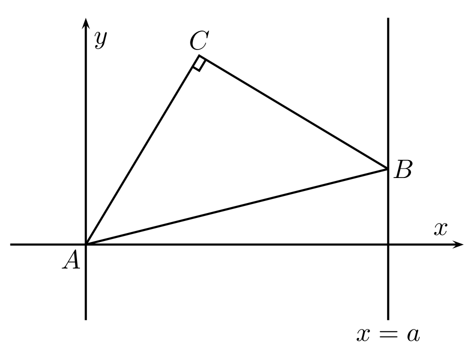
$$(0, b - m_{L'}a) + (a - \frac{b}{m_{L'}}, 0) = 2\left(\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}}, m\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}}\right)$$

igualando coordenadas se obtiene que $m_{L'} = -m$ y así finalmente

$$L'\colon (y-b) = -m(x-a).$$

P2. Un triángulo ABC isósceles ($AC = BC$) y rectángulo en C, varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas y su vértice B se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C y reconocer la figura que describe.

Solución



Consideremos los puntos $A = (0,0)$, $B = (a, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$. Como el triángulo es isósceles se tiene que $AC = BC$, luego

$$(x_c - 0)^2 + (y_c - 0)^2 = (x_c - a)^2 + (y_c - y_b)^2. \tag{1}$$

Por otro lado $AC \perp BC$, entonces si m_{AC} y m_{BC} son las pendientes de las rectas que pasan por AC y BC respectivamente, debe tenerse que

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = -1.$$

y

$$\begin{aligned} m_{AC} &= \frac{y_c - 0}{x_c - 0} = \frac{y_c}{x_c} \\ m_{BC} &= \frac{y_c - y_b}{x_c - a} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{y_c(y_c - y_b)}{x_c(x_c - a)} = -1 \tag{2}$$

elevando (2) al cuadrado y reemplazando en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 &= (x_c - a)^2 + \frac{x_c^2}{y_c^2}(x_c - a)^2 \\ y_c^2 &= (x_c - a)^2 \end{aligned}$$

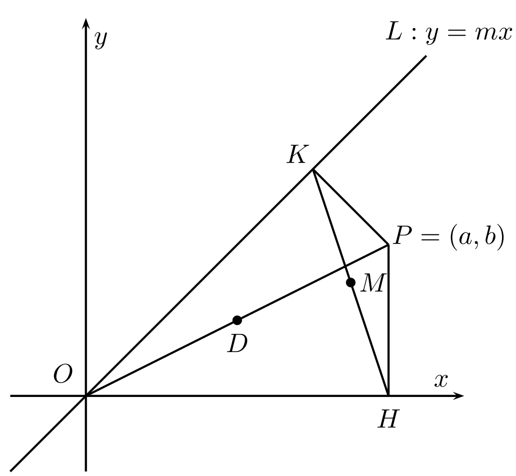
y así

$$\begin{aligned} y_c &= (x_c - a) \\ y_c &= -(x_c - a) \end{aligned}$$

es decir el lugar geométrico que recorre el punto C, son dos rectas perpendiculares.

P3. Dados el punto $P = (a, b)$ y la recta $L : y = mx$, se trazan PH perpendicular a OX y PK perpendicular a L. Si D es el punto medio de OP y M es el punto medio de HK
Probar que DM es perpendicular a HK y $DK = DH$.

Solución



Sea $K = (x_0, my_0)$, por hipótesis tenemos que:

$$P = (a, b) \quad D = (\tfrac{a}{2}, \tfrac{b}{2}) \quad M = (\tfrac{a+x_0}{2}, \tfrac{mx_0}{2})$$

Probemos que $DM \perp HK$:

$$m_{PK} = \frac{mx_0 - b}{x_0 - a}$$

como $PK \perp L$ se tiene que

$$\frac{m \cdot (mx_0 - b)}{x_0 - a} = -1 \tag{3}$$

por otro lado

$$m_{HK} = \frac{mx_0}{x_0 - a}$$

y

$$m_{PM} = \frac{\frac{mx_0}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{a+x_0}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{mx_0 - a}{x_0}$$

entonces

$$\begin{aligned} m_{HK} \cdot m_{DM} &= \frac{mx_0 - b}{x_0} \cdot \frac{mx_0}{x_0 - a} \\ &= \frac{m(mx_0 - b)}{x_0} \\ &= -1 && \text{por (3)} \end{aligned}$$

por lo tanto $HK \perp DM$.
Probemos ahora que $DM = DH$:

$$\begin{aligned} d_{DH}^2 &= (\frac{a}{2} - a)^2 + (\frac{b}{2} - 0)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

y

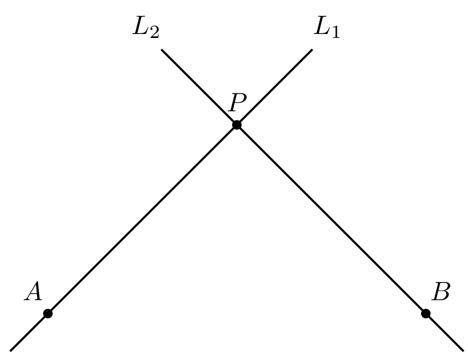
$$\begin{aligned} d_{DK}^2 &= (\frac{a}{2} - x_0)^2 + (\frac{b}{2} - mx_0)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} - ax_0 + x_0^2 + \frac{b^2}{4} - bmx_0 + m^2 x_0^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0^2 - ax_0 - bmx_0 + m^2 x_0^2 \end{aligned}$$

pero por (3) $m(mx_0 - b) = -x_0 + a$, entonces

$$\begin{aligned}
d_{DK}^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0(x_0 - a) + x_0 m(mx_0 - b) \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0 \underbrace{(m(mx_0 - b) + x_0 - a)}_{=0} \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \\
&= d_{DH}^2
\end{aligned}$$

por lo tanto $DK = DH$.

P4. Dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan, respectivamente por dos puntos fijos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P. Determinar el lugar geométrico de P.
Solución



Sean $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, luego

$$L_1 : y - b = m_1(x - a) \qquad\qquad L_2 : y - d = m_2(x - c)$$

(i) si $x = a$, entonces $P = (a, b)$.
(ii) si $x = c$, entonces $P = (c, d)$.

(iii) si $x \neq a$ y $x \neq c$;

$$m_1 = \frac{y - b}{x - a} \qquad\qquad m_2 = \frac{y - d}{x - c}$$

como $L_1 \perp L_2$ se cumple que $m_1 \cdot m_2 = -1$, es decir

$$\frac{(y - b)(y - d)}{(x - a)(x - c)} = -1 \tag{4}$$

desarrollando esta ecuación se obtiene

$$(y-\frac{(b+d)}{2})^2+(x-\frac{(a+c)}{2})^2=(b-d)^2+(a-c)^2.$$

que corresponde a una circunferencia de centro

$$C=(\frac{b+d}{2},\frac{a+c}{2})$$

y radio

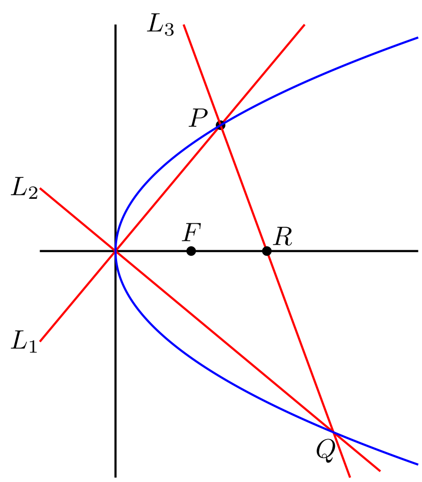
$$r=\sqrt{(b-d)^2+(a-c)^2}$$

Observación: Notar que C es el punto medio entre A y B, y $r=d_{AB}$.

Semana 4

P1. Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola, $P \neq Q$. PQ corta al eje de simetría de la parábola en R. Probar que el foco divide al trazo OR en la razón $1 : 3$.

Solución



La expresión $y^2 = 4x$ es la ecuación de una parabola de *eje horizontal* con directriz $D\colon x = -1$, foco $F = (1, 0)$ y vértice $V = (0, 0)$. Para ver esto podemos reescribir la ecuación como $x = \frac{1}{4p}y^2$ con $p = 1$ y entonces

$$\begin{aligned} D\colon x &= -p = -1 \\ F &= (p, 0) = (1, 0) \\ V &= (0, 0) \end{aligned}$$

o bien de la forma

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{con } \ a = \tfrac{1}{4}, \quad b = 0 \quad \text{y } c = 0$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \\
&D\colon x = \frac{-1-\Delta}{4a} = \frac{-1-0}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -1 \\
&F = (\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}) = (1,0)) \\
&V = (-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}) = (0,0)
\end{aligned}$$

Sabemos que L_1 y L_2 cortan al eje OY en el origen O y que son perpendiculares.
Si $L_1\colon y = mx$ con $m \neq 0$ entonces $L_2\colon y = -\frac{1}{m}x$. Para determinar R, necesitamos encontrar primero P y Q.
P: es el punto de intersección, distinto a 0, entre la parabola y L_1. Así, si $P = (x_p, y_p)$ entonces $y_p = mx_p$ y $y_p^2 = 4x_p$, luego

$$\begin{aligned}
4x_p = m^2x_p^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_p(m^2x_p - 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_p = 0 \vee x_p = \tfrac{4}{m^2}
\end{aligned}$$

El caso $x_p = 0$ no interesa pues corresponde al origen O. Así $x_p = \frac{4}{m^2} \Rightarrow y_p = \frac{4}{m}$ y por lo tanto $P = (\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m})$
Q: Se obtiene de forma similar a lo anterior, con m reemplazado por $-\frac{1}{m}$, luego $Q = (4m^2, -4m)$.
R: Es la intersección de la recta L_3, que pasa por P y Q, con el eje OX. La ecuación punto-punto de esa recta es

$$L_3\colon y - y_p = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}(x - x_p)$$

de donde

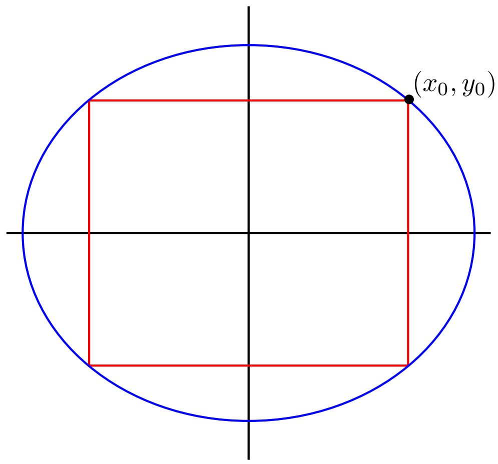
$$y - \frac{4}{m} = -\frac{m(m^2+1)}{m^4-1}(x - \frac{4}{m^2})$$

Si $R = (x_R, y_R)$ entonces sabemos que $y_R = 0$ y x_R se encuentra haciendo $y = 0$ en la ultima ecuación.
Observación: En la última ecuación hemos supuesto implícitamente que $m \neq \pm 1$ para que L_3 sea oblicua. Si $m = 1$ entonces $P = (4,4)$ y $Q = (4,-4)$ de modo que L_3 es vertical y además se obtiene que $R = (4,0)$ directamente. El caso $m = -1$ es similar. Esto justifica el caso $m = \pm 1$ por separado.
Volvamos al caso $m = \pm 1$. Haciendo $y = 0$ en la ecuación para L_3 se obtiene

$$x = \frac{+4}{m} \cdot \frac{m^4-1}{+m(m^2+1)} + \frac{4}{m^2} = \frac{4(m^4-1) + 4(m^2+1)}{m^4+m^2} = 4.$$

P2. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, encontrar el punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_+$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0,y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice las propiedades de parábolas para determinar el máximo.

Solución



De acuerdo a la figura se tiene que el área del rectángulo inscrito es

$$A(x_0,y_0)=4x_0y_0 \tag{1}$$

y como (x_0,y_0) pertenece a la elipse se satisface la relación

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

despejando y_0 en función de x_0 desde (2);

$$y_0=\pm b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}} \tag{3}$$

pero $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_+$, luego

$$y_0=b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}} \tag{4}$$

entonces reemplazando en (1) se obtiene;

$$A(x_0)=4bx_0\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$$

entonces

$$A^2(x_0)=16b^2x_0^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})$$

ahora si usamos la variable auxiliar $u = x_0^2$ se tiene que

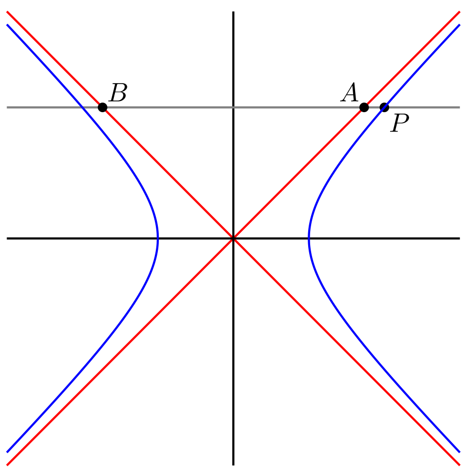
$$A^2(u) = 16b^2u(1 - \frac{u}{a^2}) \tag{5}$$

la cual corresponde a una parábola invertida, cuyo máximo se encuentra en el vértice, luego las coordenadas del vértice son

$$V = (\frac{a^2}{2}, 4b^2a^2)$$

es decir $(x_0^2) = u_{max} = \frac{a^2}{2}$ de donde $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ y usando (4) se concluye que $(x_0, y_0) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$.
Observación: Notar que acá se maximizó el cuadrado del área del rectángulo inscrito en la elipse, pero maximizar una cantidad positiva es lo mismo que maximizar su cuadrado.

P3. Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ demostrar que $AP \cdot PB = a^2$, donde P es un punto sobre la hipérbola y A y B son las intersecciones de una recta que pasa por P paralela al eje X, con las asíntotas de la hipérbola.
Solución



Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto sobre la hipérbola, entonces x_0 e y_0 satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

.
Recordemos que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas de ecuaciones $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Determinemos A y B: La recta que pasa por $P = (x_0, y_0)$ paralela al eje X, tiene ecuación $y = y_0$ y como A es la intersección de esta recta con una de las asíntotas debe cumplir

$$y = y_0$$
$$y = \frac{b}{a}x$$

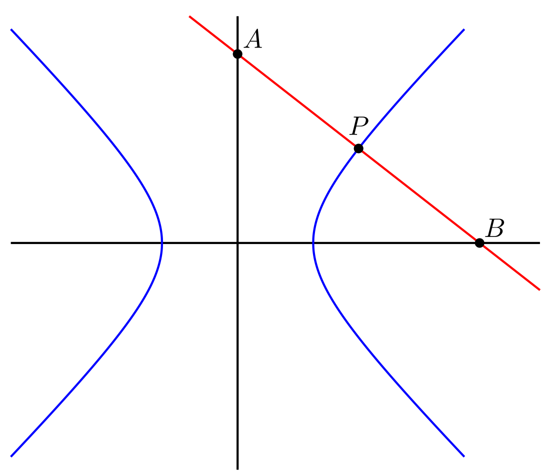
así $A = (\frac{ay_0}{b}, y_0)$, donde hemos supuesto sin pérdida de generalidad que $y_0 \geq 0$. Análogamente se obtiene que $B = (-\frac{ay_0}{b}, y_0)$.
Por lo tanto

$$d_{AP} = \sqrt{(x_0 - \frac{a}{b}y_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 - \frac{a}{b}y_0|$$
$$d_{BP} = \sqrt{(x_0 + \frac{a}{b}y_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 + \frac{a}{b}y_0|$$

y entonces

$$\begin{aligned} d_{AP} \cdot d_{BP} =& |x_0 - \frac{a}{b}y_0||x_0 + \frac{a}{b}y_0| \\ =& |x_0^2 - \frac{a^2}{b^2}y_0^2| \\ =& a^2|\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1}| \\ =& a^2 \end{aligned}$$

P4. Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella. La recta normal a la hipérbola por P corta al eje OX en A y al eje OY en B. Demuestre que P divide al trazo AB en una razón constante.
Solución



Recordemos que la ecuación de la recta tangente a una hipérbola en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{6}$$

que se puede escribir como

$$y = \frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} - \frac{b^2}{y_0}$$

es decir la pendiente de la recta tangente a la hipérbola es $m_1 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ y así la pendiente de la recta normal es $m_2 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$. Por lo tanto la ecuación de la recta normal es

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0) \tag{7}$$

Ahora debemos encontrar A y B:
A: A es la intersección de la recta normal con el eje OX, es decir satisface la ecuación (7) con $y = 0$, de donde se obtiene $A = (x_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2}, 0)$.
B: B es la intersección de la recta normal con el eje OY, es decir satisface la ecuación (7) con $x = 0$, de donde se obtiene $B = (0, y_0 + \frac{a^2 y_0}{b^2})$.
Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d_{AP}^2}{d_{BP}^2} &= \frac{(x_0 - (x_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2}))^2 + (y_0 - 0)^2}{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - (y_0 + \frac{a^2 y_0}{b^2}))^2} \\
&= \frac{b^4}{a^4} \frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \\
&= \frac{b^4}{a^4}
\end{aligned}$$

por lo tanto P divide al trazo AB en una razón constante.

P5. Considere una parábola y una recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical o bien horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga que L es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p > 0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

a) Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L.

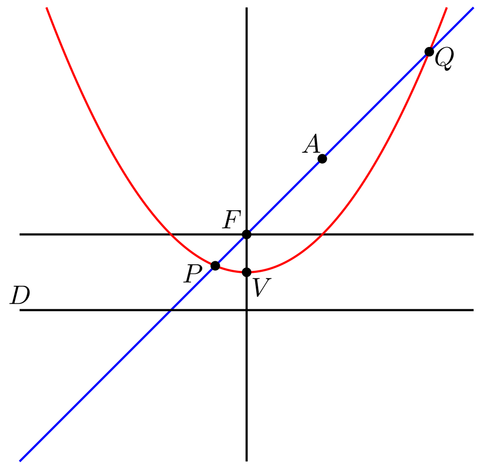
b) Calcule los dos puntos de intersección P y Q de L con la parábola en función de p y m.

c) Encuentre el punto medio A del segmento PQ.

d) Pruebe que $dist(A, P) = dist(A, D)$ donde D es la recta directriz de la parábola.

e) Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

Solución



Sean F, V y D el foco, el vértice y la directriz de la parábola respectivamente. Escojamos la parábola como en la figura, es decir con el foco F en el origen de coordenadas y el vértice V a una distancia p desde el origen, luego

$$\begin{aligned} V =& (0, -p) \\ F =& (0, 0) \end{aligned}$$

(a) La ecuación de una parábola vertical de foco $(0, p)$ es $y = \frac{x^2}{4p}$, y trasladando el foco al origen se obtiene la ecuación de nuestra parábola

$$y = \frac{x^2}{4p} - p$$

y la ecuación de la recta es $y = mx$.

(b) Para encontrar los puntos de intersección P y Q de L con la parábola debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} y =& mx \\ y =& \frac{x^2}{4p} - p \end{aligned}$$

reemplazando la primera en la segunda ecuación, se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$\frac{x^2}{4p} - mx - p = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} (x_Q, y_Q) &= \left(2(m + \sqrt{m^2+1})p, 2(m + \sqrt{m^2+1})pm\right) \\ (x_P, y_P) &= \left(2(m - \sqrt{m^2+1})p, 2(m - \sqrt{m^2+1})pm\right) \end{aligned}$$

(c) Sea A el punto medio del segmento PQ, entonces

$$A = \frac{(x_Q, y_Q) + (x_P, y_P)}{2} = (2mp, 2m^2p).$$

(d) dado que la parábola es vertical, la directriz es una recta horizontal y la distancia entre ésta y el foco es P, entonces la directriz tiene ecuación $D : y = -2p$, por lo tanto

$$dist(A, D) = 2m^2p - (-2p) = 2m^2p + 2p = 2p(m^2 + 1)$$

y por otra lado

$$\begin{aligned} dist(A, P) =& \sqrt{\left(2mp - 2(m - \sqrt{m^2+1})p\right)^2 + \left(2m^2p - 2(m - \sqrt{m^2+1})pm\right)^2} \\ =& \sqrt{4(m^2+1)p^2m^2 + 4(m^2+1)p^2m^2} \\ =& \sqrt{4p^2(m^4 + m2^2 + 1)} \\ =& 2p(m^2 + 1) \end{aligned}$$

por lo tanto $dist(A, P) = dist(A, D)$.

(e) la recta tangente a una parábola de ecuación $y = \frac{x^2}{4p} - p$ en el punto (α, β) (ver apunte) está dada por

$$x\alpha = 4p(\frac{y + \beta}{2} + p)$$

que se puede escribir como:

$$y = \frac{\alpha}{2p}x - (2p + \beta)$$

es decir la recta tangente posee pendiente $m_t = \frac{\alpha}{2p}$ luego la pendiente de la recta tangente que pasa por P, digamos m_P, es

$$m_P = (m + \sqrt{m^2 + 1})$$

y para Q, es

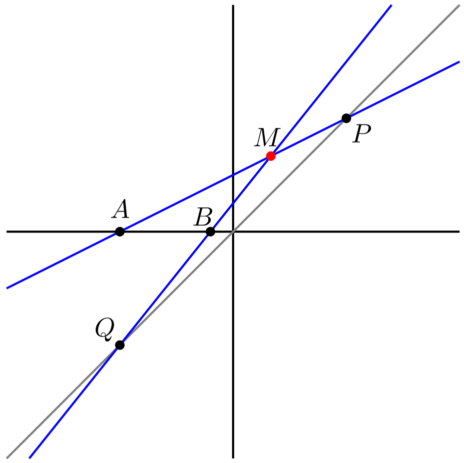
$$m_Q = (m - \sqrt{m^2 + 1})$$

así

$$m_P \cdot m_Q = (m + \sqrt{m^2 + 1})(m - \sqrt{m^2 + 1}) = -1$$

y por lo tanto las rectas tangentes a la parábola en P y Q son perpendiculares.

P6. Dada la recta L: $y = kx$ y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, se toma un punto cualquiera P sobre L y su simétrico Q con respecto al origen. Las rectas PA y QB se cortan en un punto M. Determinar el lugar geométrico de M cuando el punto P se desplaza sobre L.
Solución



Sea $P = (x_0, kx_0)$, entonces $Q = (-x_0, -kx_0)$.
Escribamos la ecuación de la recta que pasa por PA:

$$y - 0 = \frac{kx_0 - 0}{x_0 - a}(x - a)$$

lo mismo para QB:

$$y - 0 = \frac{-kx_0 - 0}{-x_0 - b}(x - b)$$

donde hemos supuesto que $x_0 \neq a$ y $x_0 \neq -b$.
M es la intersección es la solución del sistema

$$\begin{aligned} y =& \frac{kx_0}{x_0 - a}(x - a) \\ y =& \frac{kx_0}{x_0 + b}(x - b) \end{aligned}$$

supongamos que $x_0 \neq 0$, entonces el sistema anterior se puede escribir como

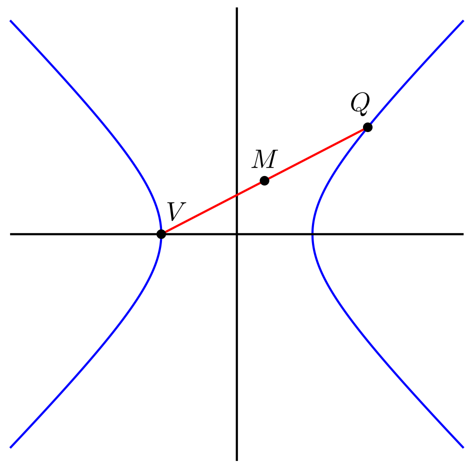
$$\begin{aligned} y(1 - \frac{a}{x_0}) =& k(x - a) \\ y(1 + \frac{b}{x_0}) =& k(x - b) \end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por b, la segunda por a y sumando

$$y(a + b) = bk(x - a) + ak(x - b)$$

que es la ecuación de una recta.

P7. Considere la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los trazos VQ, donde V es el vértice izquierdo de la hipérbola y Q un punto cualquiera de ella.
Solución



Sea $M = (x_M, y_M)$ el punto medio de los trazos VQ. Sea $Q = (x_Q, y_Q)$ un punto sobre la hipérbola y sea V el vértice izquierdo de la hipérbola, entonces $V = (-a, 0)$.
M es el punto medio de los trazos VQ, luego $M = \frac{V+Q}{2}$, es decir

$$\begin{aligned} x_M =& \frac{x_Q - a}{2} \\ y_M =& \frac{y_Q}{2} \end{aligned}$$

despejando x_Q e y_Q

$$\begin{aligned} x_Q =& 2x_M + a \\ y_Q =& 2y_M \end{aligned}$$

dividiendo la primera por a y la segunda por b, elevando al cuadrado y restado las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2} = \frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2}$$

pero Q es un punto sobre la hipérbola, luego satisface su ecuación y por lo tanto

$$\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2} = 1 = \frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2}$$

de donde

$$\frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2} = 1$$

reescribiendo esta ecuación

$$\left(\frac{x_M - (-a)}{a/2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{b/2}\right)^2 = 1$$

que corresponde a la ecuación de una hipérbola de semiejes $a/2$ y $b/2$ y centro $(-a, 0)$. Por lo tanto el lugar geométrico es una hipérbola.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Viernes 17 de Abril de 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 5

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

(a) Determine $A = Dom\ f$, recorrido y paridad.

(b) Encuentre los ceros y signos de f.

(c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.

(d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.

(e) Determine el mayor conjunto B, $B \subseteq A = Dom\ f$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva, y calcule $f^{-1}(x)$.

(f) Bosqueje el gráfico de f y de $|f|$.

Solución:

(a) Buscamos el mayor conjunto A, donde la función f quede bien definida. Para esto, debemos notar en primer lugar que la expresion $\sqrt{1-x^2}$ se indefine cuando el argumento de la raíz es negativo, por lo que debemos imponer que los elementos $x \in A$ cumplan:

$$\begin{aligned} 1-x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq x^2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \end{aligned}$$

Como $|x|$ no crea restricciones adicionales al conjunto de partida, terminamos concluyendo que $A = Dom\ f = [-1,1]$. Finalmente, para estudiar la paridad veamos qué pasa con $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} \\ &= |x| - \sqrt{1-x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es par.

(b) Para encontrar los ceros de f, que corresponden a todos los $x \in A$ tales que $f(x) = 0$, debemos imponer esta última igualdad, y despejar los valores de x que la verifican:

$$\begin{aligned} & |x| - \sqrt{1-x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & |x| = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 1-x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

En consecuencia, los ceros de f son $Z = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Analicemos los sígnos de f. Para encontrarlos, debemos resolver las inecuaciones $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, que se traducen en:

$$|x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \tag{1}$$

$$|x| - \sqrt{1-x^2} < 0 \tag{2}$$

Desarrollemos (1), que nos dará los valores de x para que $f(x)$ sea positiva:

$$\begin{aligned} & |x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & |x| > \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 > 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2 > 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad & x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \end{aligned}$$

Claramente, el subconjunto de A donde $f(x)$ es negativa es el complemento (relativo a A) de los ceros y las zonas donde $f(x) > 0$, por lo tanto $f(x) < 0$ ssi

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(c) Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Reconstruyamos la función, de forma que podamos analizar el crecimiento o decrecimiento de ella:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad & {x_1}^2 < {x_2}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -{x_1}^2 > -{x_2}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - {x_1}^2 > 1 - {x_2}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{1-{x_1}^2} > \sqrt{1-{x_2}^2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\sqrt{1-{x_1}^2} < -\sqrt{1-{x_2}^2} \\ \Leftrightarrow \quad & |x_1| - \sqrt{1-{x_1}^2} > |x_2| - \sqrt{1-{x_2}^2} \\ \Leftrightarrow \quad & f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Esto implica que la función es estrictamente creciente en $[0, 1]$. Por tratarse de una función par, concluimos que en $[-1, 0]$ es estrictamente decreciente. Ahora que hemos analizado el crecimiento, podemos encontrar el recorrido de f. Notemos que por ser f par nos basta analizar lo que ocurre en $[0, 1]$. Como ya sabemos que en este intervalo la función es estrictamente creciente, nos basta evaluar en los extremos del intervalo y tendremos el valor mínimo y máximo, respectivamente. Así, tenemos que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$ implican que $Rec\ f = [-1, 1]$.

(d) Claramente de la parte (b), f no es sobreyectiva, pues $Rec\ f = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$. Recordemos que siempre se puede cambiar una función f no epiyectiva, por una función g tal que su conjunto de llegada sea el recorrido de f, es decir,

$$\begin{aligned} g : & A \to f(A) \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Que resulta ser epiyectiva. Podríamos llamar a g la «sobreyectización» de f.
Veamos que f no es inyectiva. Esto resulta claro del hecho que f es par y por lo tanto $f(x) = f(-x),\ \forall x \in A$.
Nota: Toda función par, con dominio A no vacío, simétrico y tal que $A \neq \{0\}$ es no inyectiva.

(e) Notemos que si restringimos f al conjunto $B = [0, 1]$, resulta ser inyectiva (deja de ser par y es estrictamente creciente). Además como cambiamos el conjunto de llegada a $f(A) = Rec\ f$. Tenemos entonces que $\tilde{f} : B \to f(A)$ es biyectiva.
Nota 1: Cambiamos de nombre a f por $\tilde{f}$, pues dos funciones para ser iguales deben tener mismo dominio y mismo recorrido, así, si restringimos f a un conjunto menor que su dominio, obtenemos una nueva función, que resulta ser igual en todo punto a f pero que no es f.

Nota 2: Toda función estrictamente creciente (o decreciente) es inyectiva.
Para encontrar la inversa debemos encontrar, para cada $y \in [-1,1]$, $x \in B$ tal que $y = f(x)$, para esto debemos resolver la siguiente ecuación en x

$$\begin{aligned} y = x - \sqrt{1-x^2} &\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x - y \\ &\Rightarrow 1 - x^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - xy - \frac{y^2-1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2} \end{aligned}$$

Notemos que en $\mathbb{R}$ tenemos dos soluciones. Debemos descartar una pues la inversa, de existir, debe ser única. Para esto notemos que se cumple que $y - \sqrt{2-y^2} < 0$ para todo $y \in [-1,1)$. Para $y = 1$ las dos soluciones de la ecuación anterior estan en el dominio de la función (la soluciones son 0 y 1), pero $f(0) = -1$ no es solución de la ecuación original. Entonces concluimos que la función inversa es

$$\begin{aligned} f^{-1} \ &: f(B) \to B \\ x &\mapsto \frac{x + \sqrt{2-x^2}}{2} \end{aligned}$$

Notemos que si tomamos $B = [-1,0]$ tendríamos que ocupar la solución negativa.

(f) Gráfico de f

P2. Sea $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$.

(a) Encuentre su dominio A, ceros y signos.

(b) Pruebe que f es inyectiva.

(c) Pruebe que el recorrido de f es $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(d) Encuentre la función inversa de $f : A \to \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ y explicite su dominio y recorrido.

Solución:

(a) Notamos que la única restricción para el dominio de esta función es que el denominador no puede valer cero, ya que la división quedaría indefinida, por lo tanto $A = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{2}\right\}$.
Calculamos los ceros de la función tal como en el P1, imponiendo $f(x) = 0$:

$$\frac{x+1}{2x+1} = 0 \ \Leftrightarrow \ x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -1$$

Teniendo esto, para encontrar los signos de f, basta notar que $\forall x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$; y que $\forall x \in (-1, +\infty)$, $f(x) > 0$.

(b) Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Probemos que esto implica necesariamente que $x_1 = x_2$. En efecto:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1+1)(2x_2+1) = (x_2+1)(2x_1+1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 1 = 2x_1x_2 + x_2 + 2x_1 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 = x_2 + 2x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

(c) Para responder esta pregunta, podemos considerar la función como $y = \frac{x+1}{2x+1}$, despejar x en función de y para así obtener la inversa f^{-1} (entre comillas, porque aún no sabemos si f es biyectiva), y analizar su dominio, que será precisamente el recorrido de f. Siendo así, tenemos:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad y(2x+1) = x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2xy + y = x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(2y-1) = 1 - y \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1-y}{2y-1} \end{aligned}$$

Así, es claro que la única restricción es que y sea distinto de $\frac{1}{2}$, por lo tanto, Rec $f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

(d) Con todo lo encontrado previamente, tenemos que la función inversa de f es aquella tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B \quad &\rightarrow \quad A \\ x \quad &\mapsto \quad f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}, \end{aligned}$$

con $B = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, y A el dominio de f, encontrado en a).

P3. Sea la fórmula $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$.

(a) Determine el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, que a x le asocia $f(x)$, sea una función.

(b) Encuentre los ceros de f y determine sus signos.

(c) Determine la paridad y periodicidad de f.

(d) Determine la inyectividad y biyectividad de f.

(e) Encuentre los intervalos donde f crece y aquellos donde f decrece.

(f) Grafique f.

Solución:

(a) Tal como en las preguntas anteriores, busquemos las posibles indefiniciones de la función, para así sacarlas del dominio de ella. Imponiendo que el argumento de la raíz sea mayor o igual a cero, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{x+1} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+1-2}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

Notemos que la otra restricción de la función, $x \neq -1$ (para que la fracción no sea dividida por cero) ya está presente en el conjunto encontrado, por lo tanto $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

(b) Imponiendo $f(x) = 0$, el(los) valor(es) de x que lo cumple(n) es(son):

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2}{x+1} \\ &\Rightarrow \quad x + 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \end{aligned}$$

Tal como en la pregunta anterior, la presencia de la implicancia se debe a que esto sólo es verdad cuando x pertenece al dominio de la función.
Ahora, notemos que para encontrar los puntos donde $f(x) > 0$, en el desarrollo de la inecuación correspondiente, llega un punto donde debemos resolver la misma que en la parte a), por lo tanto, concluimos que la función es positiva en todo su dominio, y por ende, nunca es negativa.

(c) Notemos que el dominio de f no es simétrico, y por lo tanto, la función no puede ser par ni impar.
Para estudiar la periodicidad de f, debemos encontrar $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(x+p) = f(x)$. Entonces resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} f(x+p) = f(x) &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x+p}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{1+x} = 1 - \frac{2}{1+x+p} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+x+p} \\ &\Rightarrow 1+x = 1+x+p \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función tampoco es periódica.

(d) La función es claramente no sobreyectiva, ya que para ningún $y \in \mathbb{R}^-$ existe un x tal que $y = f(x)$. Veamos si es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, y desarrollemos:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{2}{x_1+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x_2+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x_1+1} = 1 - \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_2+1} = \frac{2}{x_1+1} \\ &\Rightarrow \quad 2(x_1+1) = 2(x_2+1) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Así, concluimos que f es inyectiva, pero no sobreyectiva.

(e) Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que $x_1 < x_2$. Busquemos reconstruir la función, para ir analizando sus zonas de crecimiento y decrecimiento:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 + 1 < x_2 + 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_1+1} > \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{x_1+1} < -\frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x_1+1} < 1 - \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{2}{x_1+1}} < \sqrt{1 - \frac{2}{x_2+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Concluimos que la función es estrictamente creciente en todo su dominio.

(f) Gráfico de f

P4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & si\ x \geq 0 \\ x + \beta & si\ x < 0 \end{cases}$.

(a) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$.

(b) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.

(c) ¿Cuál es el conjunto $B = \big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | f \text{ es biyectiva}\big\}$?

Solución:

(a) Una función f es epiyectiva, ssi todo elemento en su codominio tiene una preimagen en el dominio de ella. En este caso, para que f sea epiyectiva, necesitamos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Notemos que, para poder trabajar con los intervalos que definen a la función, podemos escribir $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$. Así, tenemos:

$$f(\mathbb{R}) = f\left((-\infty, 0) \cup [0, +\infty)\right) = f\left((-\infty, 0)\right) \cup f\left([0, +\infty)\right) = (-\infty, \beta) \cup [\alpha, +\infty)$$

Punto en el que notamos que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$, para que ningún valor de x se salga de la unión de los intervalos, y asi obtengamos todo $\mathbb{R}$.

(b) Para este caso, probemos la doble implicancia:
$\Rightarrow$) Tenemos que f es inyectiva, con lo que debemos probar que $\alpha \geq \beta$. Razonemos por contradicción, vale decir, supongamos que f es inyectiva y que $\alpha < \beta$. Entonces, tendríamos que $\alpha - \beta < 0$ y luego $f(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha = f(0)$.
Como f es inyectiva, y $f(\alpha - \beta) = f(0)$, deberíamos concluir que $\alpha - \beta = 0$, contradiciendo nuestra suposición inicial; por lo tanto $\alpha \geq \beta$.
$\Leftarrow$) Ahora debemos tomar como hipótesis que $\alpha \geq \beta$, y con esto probar que f es inyectiva. De la definición de f, notamos que es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$ por separado, y como $\alpha \geq \beta$, también es creciente al pasar de uno al otro. Por lo tanto, la función es inyectiva.
Así, probadas las dos implicancias, concluimos que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.

(c) Sabemos que f es biyectiva ssi f es inyectiva y epiyectiva a la vez, y claramente, de lo obtenido en *a*) y en *b*), ambas condiciones se cumplen cuando $\alpha = \beta$. Por lo tanto, el conjunto buscado es:

$$B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \beta\}$$

P5. Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq |x|$.

Solución:

Observando la definición de la función, notamos en forma directa que debemos separar el estudio de ella en dos casos, $x \in \mathbb{Q}$, o bien $x \notin \mathbb{Q}$. Partamos por este último, notando que $g(x) = 0$ para cualquier x en esta situación, por lo que $|g(x)| = 0$, que claramente es siempre menor que $|x|$ (ya que $0 \in \mathbb{Q}$).
En el caso de $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, de donde rápidamente concluimos que $|g(x)| = |x|$.
Finalmente, uniendo ambos casos estudiados, y recordando que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, se llega a la conclusión de que:

$$|g(x)| \leq |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
23 de Abril del 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 6

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Considere la función

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$$

Encuentre dominio, signos, ceros, paridad, periodicidad e inyectividad.
Solución

(a) Dominio: Para encontrar el dominio, notamos que en los únicos puntos en donde puede haber problemas, son en los que el denominador se anula. Para buscarlos, debemos resolver la ecuación $1-\cos x = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 1-\cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Concluimos que el dominio f es el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Signos: Notemos que dado que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{sen} x \in [-1,1]$ y $\cos x \in [-1,1]$, tenemos que $1+\sin x \in [0,2]$ y que $1-\cos x \in [0,2]$. Luego, f es no negativa, por ser cuociente de funciones no negativas.

(c) Ceros: Necesitamos encontrar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 0$. Para ello, debemos resolver la ecuación en A

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x} \\ &\Leftrightarrow 1+\operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

En consecuencia los ceros de f son $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Paridad: Afirmamos que f no es par ni impar. En efecto, aunque el dominio es simétrico, sus ceros no lo son (p.ej. $\frac{3\pi}{2}$ es un cero pero $-\frac{3\pi}{2}$ no lo es). Luego, $\forall x \in Z \quad \pm f(x) = 0 \neq f(-x)$.

(e) Periodicidad: Vemos que f debe ser al menos 2π-periódica, pues es cuociente de funciones 2π-periódicas. Recordemos que la definición de periodo es el menor $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+p) = f(x)$. Veamos que no hay $p < 2\pi$ que cumpla lo anterior. Razonemos por contradicción:

Supongamos que f tiene periodo $p \in (0, 2\pi)$. Luego, para cualquier $x \in A$ debe cumplirse que $f(x+p) = f(x)$, en particular para $x = \frac{3\pi}{2}$. Pero si resolvemos la ecuación para p obtenemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2}+p\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &\Leftrightarrow \frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+p\right)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+p\right)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+p\right) = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}+p = \frac{3\pi}{2} \quad (\star) \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

Contradicción, pues supusimos que $0 < p$. Luego, concluimos que f es 2π-periódica.
Nota $(\star)$*: Aquí descartamos las soluciónes de la forma* $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$*, pues sólo necesitamos soluciones* $p < 2\pi$.

(f) Inyectividad: Notamos que f no es inyectiva pues $\forall x \in A,\ f(x+p) = f(x)$.
Nota: Toda función periódica, en donde el dominio contenga a x *y a* $x+p$ *(por lo menos), es no inyectiva.*

P2. **(a)** Encuentre los ceros de la función: $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$.
Indicación: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
Solución

Vemos que la indicación no sirve mucho como viene, trabajemosla un momento entonces. Notemos que si cambiamos b por $-b$ obtenemos que

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (\bullet)$$

y entonces ahora sí podemos aplicar la fórmula a la ecuación. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 0 \\ &\overset{(\bullet)}{\Leftrightarrow} (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 0 \end{aligned}$$

Recordando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) - (\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(\cos x + \operatorname{sen} x - 1)}_{(1)}\underbrace{(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x)}_{(2)} = 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$, obtenemos dos ecuaciones. Resolviendo (1)=0:

$$\cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \operatorname{sen} x = 1$$

Notemos que esta ecuación sólo tiene solución cuando $\cos x = 1 \wedge \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$ o $\operatorname{sen} x = 1 \wedge \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Así, determinamos un conjunto solución $Z_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Resolvamos ahora (2)=0:

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x &\Leftrightarrow 1 - \cos x \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x \operatorname{sen} x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 2 \end{aligned}$$

Dado que $|\operatorname{sen} \alpha| \leq 1, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, concluimos que el conjunto solución de esta ecuación es $Z_2 = \phi$.
De todo lo anterior deducimos que los ceros de la función están en el conjunto

$$Z = Z_1 \cup Z_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\operatorname{cotg}(3x) - \operatorname{cotg}(x)} = \operatorname{cotg}(2x)$$

Solución
Primero veamos la siguiente identidad

$$\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(3x - x) = \frac{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)}{1 + \operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}$$

y recordando que

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{\operatorname{cotg}(3x)-\operatorname{cotg}(x)} &= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}(3x)}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(3x)}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}+\frac{\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}\\
&= \frac{1+\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(2x)}\\
&= \operatorname{cotg}(2x)
\end{aligned}
$$

P3. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\sec^2\frac{x}{2}+\cos x\tan\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x=0$$

Solución
Para simplificar un póco los cálculos, haremos el cambio $x = 2\alpha$. A primera vista parece que el cambio no ayuda mucho, pero nos permite escribir la expresión en términos de ángluos dobles, que tienen identidades más fáciles. Además notemos que como aparecen $\sec x$ y $\tan x$, se subentiende que estamos en un dominio tal que tiene sentido hablar de $\frac{1}{\cos x}$. Dicho esto, desarrollemos la expresión

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\sec^2\frac{x}{2}+\cos x\tan\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\sec^2\alpha+\cos 2\alpha\tan\frac{\alpha}{-}\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\sec^2\alpha+(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)\tan\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\alpha}\frac{1}{\cancel{\cos^2\alpha}}+\cancel{\cos^2\alpha}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}-\operatorname{sen}^2\alpha\tan\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \tan\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\tan\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \tan\alpha(1-\operatorname{sen}^2\alpha)+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \tan\alpha\cos^2\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cancel{\cos^2}\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= \operatorname{sen}2\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\\
&= 0
\end{aligned}
$$

P4. Demuestre que $\forall\beta\gamma\in\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

(a) $\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma=\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma))$
Solución
Si partimos por la derecha, utilizando la identidad $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)) &= \frac{1}{2}(\cancel{\cos\beta\cos\gamma}+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\cancel{\cos\beta\cos\gamma}+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma)\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\\
&= \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma
\end{aligned}
$$

(b) $\operatorname{sen}\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\beta+\gamma)+\operatorname{sen}(\beta-\gamma))$

Solución

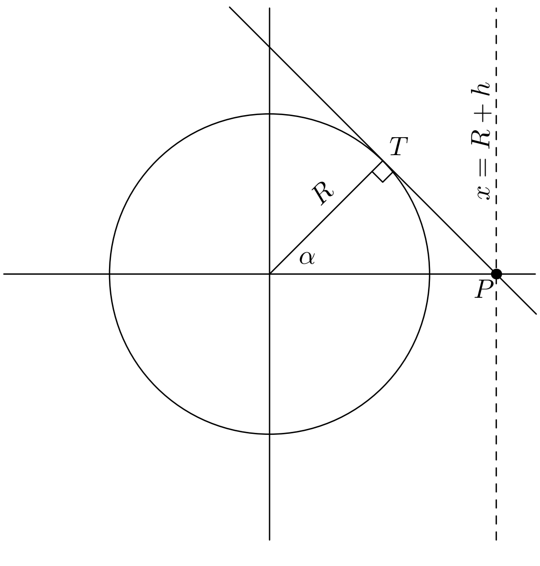
Si partimos por la derecha, utilizando la identidad $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x\cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\beta+\gamma)+\operatorname{sen}(\beta-\gamma)) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \cancel{\cos\beta\operatorname{sen}\gamma} + \operatorname{sen}\beta\cos\gamma - \cancel{\cos\beta\operatorname{sen}\gamma})\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\beta\cos\gamma\\ &= \operatorname{sen}\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

P5. Suponga que usted está parado a una altura h sobre el nivel del mar, mirando al horizonte. Suponga que la Tierra es una circunferencia de radio R. Calcule la cantidad máxima de kilómetros que es posible ver, es decir, el largo del arco de circunferencia que es posible ver.

Solución

Supongamos que nos encontramos parados en un punto P en el espacio. Para simplificar las cosas, tomaremos los ejes coordenados centrados en el centro de la Tierra, y pondremos el punto P sobre el eje OX. Sabemos que el largo de un arco de circunferencia se calcula como $R\cdot\alpha$, donde R es el radio de la circunferencia y α es el ángulo que subtiende el arco. Entonces, necesitamos calcular el ángulo que forma la recta que pasar por el punto P y la tangente a la Tierra que pasa por P. El punto de tangencia T es donde termina la línea visual de la persona. Tenemos entonces la siguiente situación



Como se ve en el dibujo, $\overline{OP} = R+h$, $\overline{OT} = R$. Sabemos que el radio siempre es perpendicular a una tangente en su punto de intersección; hemos formado un triángulo rectángulo. Entonces tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{R}{R+h}$$

y aplicando inversa

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

Por tanto, la distancia que es posible ver es

$$R\cdot\alpha = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
01 de Mayo del 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 7

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}.$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico y determinar si $\frac{3\pi}{5}$ es solución.

Solución

Primero recordemos que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos \frac{x}{2} = 0.\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\cos x - \cos y$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\cos x - \cos y &= \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) \\ &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Donde la última expresión, se obtiene después de aplicar las fórmulas ya conocidas para calcular el coseno de sumas y restas de ángulos, según corresponda.
Con esto, volvemos al problema, y reescribimos:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right)}_{(1)}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right)}_{(2)} = 0.\end{aligned}$$

Lo que vale si y sólo si $(1) = 0 \vee (2) = 0$. Resolviendo las ecuaciones por separado tenemos

$$\begin{aligned}(1) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 3x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{3}.\end{aligned}$$

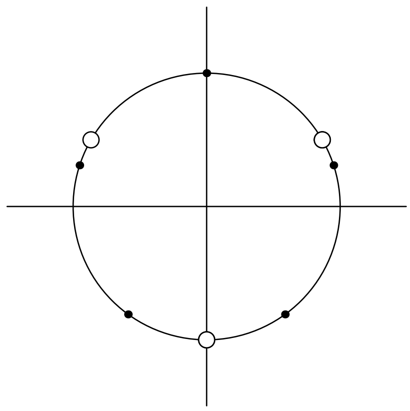
y para (2)

$$\begin{aligned}(2) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 5x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{5}.\end{aligned}$$

Para ver si $\frac{3\pi}{5}$ es solución, debemos encontrar, en las soluciones de (2), un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} \equiv_{4\pi} \frac{3\pi}{5}$. Esto equivale a encontrar $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi$. Esto pues la función $\operatorname{sen} 2x - \cos\frac{x}{2}$ es 4π-periódica. Resolvamos

$$\begin{aligned}
\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi &\Leftrightarrow 3 - 1 + 4k = 20\ell \\
&\Leftrightarrow 2 + 4k = 20\ell \\
&\Leftrightarrow 1 + 2k = 10\ell
\end{aligned}$$

Lo que es imposible. Concluimos que $\frac{3\pi}{5}$ no es solución.
Para graficar las soluciones, notemos que como la función es 4π-periódica, entonces en el circulo unitario veremos aparentemente soluciones que no lo son, por ejemplo $\frac{3\pi}{5}$, pues $\frac{3\pi}{5} \equiv_{2\pi} \frac{-7\pi}{5}$ y sabemos que $\frac{-7\pi}{5}$ es solución. Entonces lo que haremos será hacer el cambio $x = 2\alpha$ (para obtener una función 2π-periódica y graficaremos para α.



P2. **(a)** Demostrar que $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Solución

Primero notemos que, sumando un cero adecuado, tenemos

$$\alpha = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Entonces

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] + \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

Recordemos ahora que $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\
&+ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Solución

Notemos que $\cos 0 = 1$, entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\cos 2x + 1 + \overbrace{\cos 3x + \cos x}^{(a)} = 0 &\Leftrightarrow \overbrace{\cos x + \cos 0}^{(a)} + 2\cos 2x \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\cos^2 x + \cancel{2}\cos 2x \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x (\overbrace{\cos 2x + \cos x}^{(a)}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\underbrace{\cos x}_{(1)} \underbrace{\cos \frac{3x}{2}}_{(2)} \underbrace{\cos \frac{x}{2}}_{(3)} = 0.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones para x: $(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0$. Resolviendo por separado:

- (1)=0:
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi.$$
- (2)=0:
$$\begin{aligned}
\cos \frac{3x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}.
\end{aligned}$$
- (3)=0:
$$\begin{aligned}
\cos \frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \\
&\Leftrightarrow x = 4k\pi.
\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

P3. Resolver la ecuación
$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1.$$

Solución
Un camino posible para solucionar el problema, es aplicar un método visto en cátedra, haciendo el cambio de variables $a = \cos x$, $b = \operatorname{sen} x$, y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

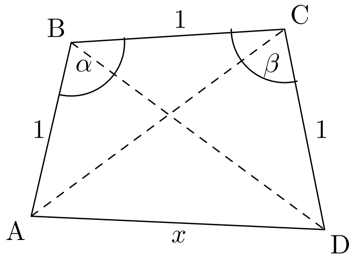
$$\begin{aligned}
a\sqrt{3} + b = 1 \\
a^2 + b^2 = 1
\end{aligned}$$

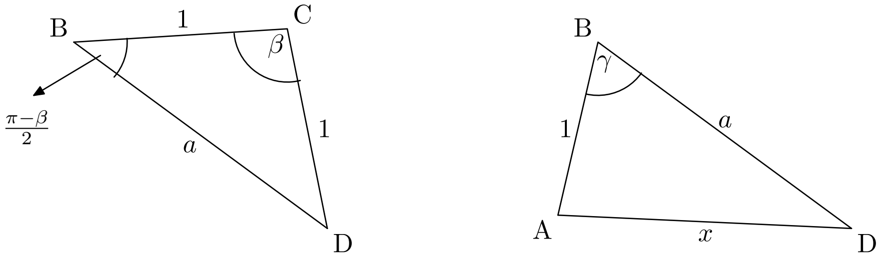
Donde la última expresión, nace del hecho de que $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es un punto perteneciente a la circunferencia unitaria. A continuación, mostraremos otra solución, un poco más "'elegante"', notando que si multiplicamos la igualdad por $\frac{1}{2}$ obtenemos que
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Recordemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Entonces
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Y aplicando la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \overbrace{\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&\Leftrightarrow x = \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$





P4. En un cuadrilátero $ABCD$, conocemos los ángulos ABC, BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1.
Probar que la longitud del lado DA es igual a $\sqrt{3 - 2\cos\alpha - 2\cos\beta + 2\cos(\alpha+\beta)}$.
Solución
Tenemos la siguiente situación.

Consideremos los triángulos BCD y ABD.

En primer lugar, notemos que en el triangulo ABD, tenemos la relación $\gamma + \frac{\pi-\beta}{2} = \alpha$. Luego, usando el Teorema del Coseno en el triangulo BCD, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 = 1 + a^2 - 2a\cos\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right) &\Leftrightarrow 0 = a^2 - 2a \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 = a\left(a - 2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Descartamos el caso a=0, pues no presenta interés para el problema.
Haciendo lo análogo en el triangulo ABD

$$\begin{aligned} x^2 = 1 + 4\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2} - 4\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) &= 1 + 2(1-\cos\beta) - 4\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) \\ &= 1 + 2(1-\cos\beta) - 4\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha+\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

En el problema **P1.** demostramos que $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$, entonces tenemos la siguiente identidad

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha = -2\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}.$$

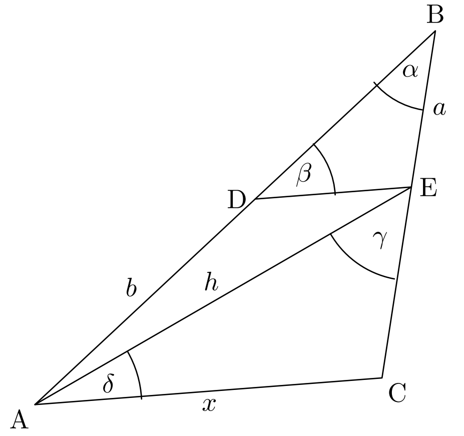
y entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 = 1 + 2(1-\cos\beta) + 2(\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha) &\Leftrightarrow x^2 = 3 - 2\cos\beta - 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha+\beta) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - 2\cos\beta - 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

P5. Considere la siguiente figura

(a) Encontrar d en términos de α, β y a.
Solución
Usando el Teorema del Seno en el triangulo DEB:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{d} \Leftrightarrow d = a \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$



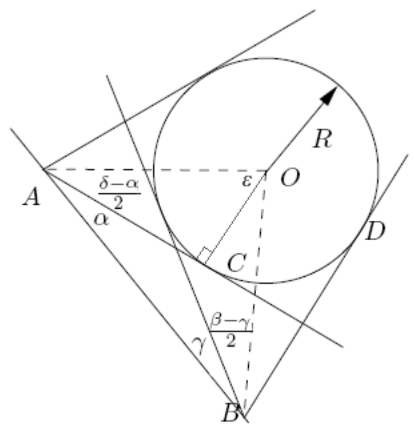
(b) Encontrar h en términos de α, β, b y d.
Solución
Usando el Teorema del Coseno en el triangulo ADE:

$$h^2 = d^2 + b^2 - 2bd\cos(\pi - \beta) \Rightarrow h = \sqrt{a^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \beta} + b^2 + 2ab\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\cos\beta}$$

(c) Determinar el valor de x.
Solución
Usando el Teorema del Seno en el triangulo ACE:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - \delta - \gamma)}{h} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\delta + \gamma)}{h} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{x}$$
$$\Leftrightarrow x = h \cdot \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\delta + \gamma)}$$

P6. Se quiere medir el radio R de un estadio de forma circular, para lo cual se dispone de la distancia L entre los puntos A y B y los ángulos α, β, γ, δ entre las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A y B y el trazo $\overline{AB}$, como se muestra en la figura. Exprese R en términos de $L = \overline{AB}$ y α, β, γ, δ.



Solución
Como el triangulo ACO es recto, tenemos, por definición, que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\delta - \alpha}{2}\right) = \frac{R}{\overline{OA}}$$

Luego, podemos calcular $\overline{OA}$ como sigue:

Si nos fijamos en el triangulo AOB, observamos que

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \pi - \left(\alpha - \frac{\delta-\alpha}{2} + \gamma - \frac{\beta-\gamma}{2}\right)\\ &= \pi - \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right).\end{aligned}$$

Y luego usando el Teorema del Seno en el triangulo AOB

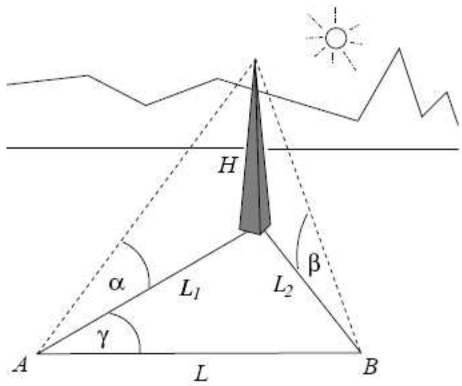
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)}{L} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\overline{OA}}\\ \Leftrightarrow \overline{OA} &= \frac{L\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)}\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$R = \overline{OA}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right) = \frac{L\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)}.$$

P7. La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ en los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$.
(Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \gamma < \pi$).

Solución



Directamente de la figura tenemos que

$$L_1 = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha},\quad L_2 = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta}$$

Luego, del Teorema del Coseno tenemos que

$$\begin{aligned}L_2^2 = L_1^2 + L^2 - 2LL_1\cos\gamma &\Leftrightarrow \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + L^2 - 2\frac{LH\cos\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}\\ &\Leftrightarrow H^2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha) + 2LH\operatorname{cotg}\alpha\cos\gamma - L^2 = 0\end{aligned}$$

Aquí, si imponemos $\alpha = \beta$, obtenemos un valor para H dado por

$$H = \frac{L\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\gamma}$$

Supongamos ahora que $\alpha \neq \beta$, entonces resolviendo la cuadrática para H

$$H = \frac{-2L\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta \pm \sqrt{4L^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^2\beta + 4(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)L^2}}{2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)}$$

Notemos que dependiendo del signo de $\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha$ tenemos dos casos, pues solo nos interesa una solución positiva.

- Caso 1 ($\alpha < \beta$): Aquí tenemos que $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{cotg}^2\alpha > \operatorname{cotg}^2\beta$ y entonces nos quedamos con la solución
$$H = \frac{-2L\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta - \sqrt{4L^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^2\beta + 4(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)L^2}}{2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)}$$
por ser positiva.
- Caso 2 ($\alpha > \beta$): Análogamente al caso anterior, nos quedamos con la solución
$$H = \frac{-2L\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta + \sqrt{4L^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^2\beta + 4(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)L^2}}{2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)}$$
por ser positiva.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
07 de Mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 8

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Probar que $\inf\left\{\frac{1}{2n+1}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}=0$

Solución

Llamemos A al conjunto bajo estudio. Comprobaremos que 0 cumple las dos propiedades del ínfimo, es decir

(a) 0 es cota inferior de A.

(b) Cualquier otra cota inferior de A es menor que 0.

Veamos cada propiedad por separado.

(a) Por definición, 0 es cota inferior de A ssi $(\forall x\in A)\ 0\leq x$. En efecto, los elementos de A son de la forma $\frac{1}{2n+1}$, con $n\in\mathbb{N}$. Notemos que 1 y $2n+1$ son estrictamente positivos para todo n natural, por lo tanto también su cuociente, y entonces tenemos que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{2n+1}\geq 0$. De esto se sigue que 0 es cota inferior de A.

(b) Ahora probaremos que ningún número positivo puede ser cota inferior de A, es decir, mostraremos que

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists m\in\mathbb{N})\quad \frac{1}{2m+1}<\varepsilon.$$

En efecto, dado $\varepsilon>0$, por la Propiedad Arquimediana, $\exists m\in\mathbb{N}$ tal que $1<m\varepsilon$. Notemos que $1<m\varepsilon<2m\varepsilon<2m\varepsilon+\varepsilon=\varepsilon(2m+1)$, desigualdades válidas pues todas las cantidades involucradas son estrictamente positivas. Obtenemos que

$$1<\varepsilon(2m+1)\iff \frac{1}{2m+1}<\varepsilon.$$

Hemos demostrado que ningún número positivo puede ser cota inferior de A, pues dado cualquiera, hay un elemento en A menor que éste. Por lo tanto, cualquier cota inferior c de A debe cumplir que $c\leq 0$.

De todo lo anterior, concluimos que 0 es el ínfimo de A.■

P2. Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$. Demuestre que el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0,1])$ y determine si posee máximo.

Solución

Por hipótesis tenemos que f es creciente, y de la definición tenemos que

$$(\forall x_1,x_2\in\ \text{Dom } f)\quad x_1\leq x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2).$$

Tomando $x_2=1$ (pues la propiedad debe cumplirse para cualquier x_2), tenemos que

$$(\forall x\in\ \text{Dom } f)\quad x\leq 1\Rightarrow f(x)\leq f(1).$$

Notemos que el lado izquierdo de la implicación siempre es verdadero, por lo que ha de tenerse que

$$(\forall x\in[0,1])\quad f(x)<f(1).$$

Y con esto $f([0,1])$ es acotado superiormente por $f(1)$. Luego, por axioma del supremo, $f([0,1])$ tiene supremo. Notemos que $f(1)\in f([0,1])$. Entonces, $f(1)$ es el máximo del conjunto $f([0,1])$ y por lo tanto su supremo.■

P3. Dados a y b reales, demuestre que si para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple que $a \leq b + \varepsilon$, entonces $a \leq b$.
Solución
Sabemos que

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) \quad a \leq b + \varepsilon \\ \iff & (\forall \varepsilon > 0) \quad a - b \leq \varepsilon \\ \iff & (\forall \varepsilon \in (0, +\infty)) \quad a - b \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde concluimos que $a - b$ es cota inferior de $(0, +\infty)$.

Por otra parte, sabemos que $\inf(0, +\infty) = 0$, y por definición de ínfimo, cualquier cota inferior de $(0, +\infty)$ debe ser menor o igual que él, en particular, tenemos que

$$a - b \leq 0 \iff a \leq b. \blacksquare$$

P4. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo, y que $\sup S \leq \inf T$.
Solución
Sabemos que $(\forall x \in S)(\forall y \in T)$ $x \leq y$. Mirando la segunda parte de la proposición, tenemos que

$$(\forall y \in T) \quad x \leq y.$$

Lo que nos dice que T es acotado inferiormente (por cualquier elemento de S). Por lo tanto, por Axioma del Supremo, T tiene ínfimo. Además, por definición de ínfimo, se debe tener que

$$(\forall x \in S) \quad x \leq \inf T.$$

Lo que prueba que S es acotado superiormente. Nuevamente, por Axioma del Supremo, tenemos que S tiene supremo, y además, por definición de supremo tenemos que

$$\sup S \leq \inf T. \blacksquare$$

P5. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verifican las siguientes propiedades:

(a) $A \cup B = \mathbb{R}$

(b) Todo elemento de A es menor que todo elemento de B

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.
Solución
En el problema anterior hemos probado que si un par de subconjuntos A, B no vacíos de $\mathbb{R}$ satisfacen la condición (b), entonces $\sup A \leq \inf B$. Veamos que no puede ser que $\sup A < \inf B$.

En efecto, si esto fuera cierto, por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup A < q < \inf B$, lo que implica que $q \notin A \wedge q \notin B$. Luego, $q \notin A \cup B$ y por lo tanto $A \cup B \subsetneq \mathbb{R}$, lo que contradice (a). Concluimos que $\sup A = \inf B$. Llamando $\alpha = \sup A = \inf B$, tenemos que α es simultáneamente cota superior de A (la menor) y cota inferior de B (la mayor), además como es un supremo, es único.

P6. Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$, entonces $\sup A + \sup B \leq \sup C. \blacksquare$
Solución
Consideremos el conjunto

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R} \ : \ x \in A, y \in B\}.$$

Entonces, sabemos que

$$(\forall u \in A + B)(\exists z \in C) \quad u \leq z.$$

Lo que prueba $A + B$ es acotado superiormente y, por Axioma del Supremo, $A + B$ tiene supremo. Además, tenemos que como C es acotado, posee supremo. Por definición de supremo, tenemos que $(\forall z \in C)$ $z \leq \sup C$, y por lo tanto

$$(\forall u \in A + B) \quad u \leq \sup C.$$

De donde concluimos que $\sup C$ es cota superior de $A+B$, y por definición de supremo nuevamente

$$\sup A + B \leq \sup C$$

Notando que $\sup A + B = \sup A + \sup B$ concluimos que

$$\sup A + \sup B \leq \sup C. \blacksquare$$

P7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que $\inf A^c = \sup A$ si y sólo si $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Solución

Demostremos la doble implicancia, para $A = (-\infty, a)$. El caso en que $A = (-\infty, a]$ es completamente análogo y se deja como ejercicio al lector.

- $\Leftarrow$) Como sabemos que $A = (-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces A es acotado superiormente, por Axioma del Supremo, A posee supremo y, de hecho, $\sup A = a$. Además, como $A^c = [a, +\infty)$, A^c es acotado inferiormente y por Axioma del Supremo nuevamente, A^c posee ínfimo y además $\inf A^c = a$.

  Esto prueba que $\sup A = \inf A^c$.

- $\Rightarrow$) Razonemos por contradicción. Sea $a = \sup A$ que existe por ser A acotado superiormente. Supongamos que $A \neq (-\infty, a)$. Entonces, el intervalo $(-\infty, a)$ tiene por lo menos un punto que no está en A, digamos b. Notemos que no puede ser que $b \geq a$, pues en este caso $A = (-\infty, a) \setminus \{b\} = (-\infty, a)$ lo que es una contradicción con nuestro supuesto, de donde concluimos que $b < a$.

  Luego, $A^c = \{b\} \cup [a, +\infty)$ que es acotado inferiormente, lo que implica que $\inf A^c = b < a = \sup A$, lo que contradice el hecho que $\inf A^c = \sup A. \blacksquare$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
27 de Mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 9

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcular
$$\lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}.$$

Solución
Calculemos cada límite por separado:

- Es claro que $\lim \frac{2}{n} = 0$ (nula por acotada).
- La sucesión $a_n = 3\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ es acotada pues
$$\begin{aligned} |a_n| &= 3\left|\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)\right| \\ &\leq 3. \end{aligned}$$
  Y como $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, concluimos que el límite vale 0 (nula por acotada).
- $\lim \frac{2n+1}{3-3n} = \frac{-2}{3}$ (límite conocido).
- $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$ (límite conocido).
- $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (nula por acotada).
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ (límite conocido) y por álgebra de límites $\frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}} \to 1$.

Por el teorema de álgebra de límites (todos los límites existen) concluimos que
$$\begin{aligned} \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}} &= \frac{0+0-\frac{2}{3}}{0+0+1} \\ &= \frac{-2}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

P2. Calcule $\lim p(n)\frac{a^n}{n^n}$ para $p(n)$ un polinomio de grado k, $k \in \mathbb{N}$. Puede ser de utilidad comenzar considerando el polinomio $p(n) = n^k$ y luego utilizar el álgebra de límites.
Solución
Siguiendo la indicación del enunciado, consideremos $p(n) = n^k$, con $k \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos que
$$\begin{aligned} p(n)\frac{a^n}{n^n} &= \frac{n^k}{n^n}a^n \\ &= \frac{n^k}{n^k} \cdot \frac{a^{n-k}}{n^{n-k}} \cdot a^k \\ &= \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n^{n-k}} \cdot a^k. \end{aligned}$$

Obtenemos que
$$\begin{aligned} \lim p(n)\frac{a^n}{n^n} &= \lim \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n^{n-k}} \cdot a^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pues $\frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \to 0$, $\frac{(n-k)!}{n^{n-k}} \to 0$ (límites conocidos) y a^k es una constante. Observemos que de paso hemos demostrado que $\frac{a^n}{n^n} \to 0$.

Sabemos que un polinimio de grado k es escribe como

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i$$

con $c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, k$. Luego

$$\begin{aligned} p(n)\frac{a^n}{n^n} &= \frac{a^n}{n^n}\sum_{i=0}^{k} c_i n^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{a^n}{n^n} \cdot c_i n^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{a^{n-i}}{n^{n-i}} \cdot a^i c_i. \end{aligned}$$

Concluimos, por álgebra de límites, que $\lim p(n)\frac{a^n}{n^n} = 0$.■

P3. Demuestre que si $\lim n a_n$ existe, entonces $\lim a_n = 0$.

Solución

Sea $\ell = \lim n a_n$, que por hipótesis sabemos que existe. Notemos que $a_n = \frac{n \cdot a_n}{n}$, y luego

$$\begin{aligned} \lim a_n &= \lim \frac{n a_n}{n} \\ &= \lim n a_n \cdot \lim \frac{1}{n} \\ &= \ell \cdot 0 \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

P4. Si se sabe que para α y β positivos $\lim n(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta))$ existe, se pide calcular el valor de α y de β, y luego el valor del límite.

Solución

Aplicando el resultado anterior, tenemos que $\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta) \to 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta) &= \sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)}{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{n^2+n+1-(\alpha n + \beta)^2}{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{(1-\alpha^2)n^2 + (1-2\alpha\beta)n + 1 - \beta^2}{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{(1-\alpha^2)n^2 + (1-2\alpha\beta)n + 1 - \beta^2}{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n + \beta)} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{(1-\alpha^2)n + (1-2\alpha\beta) + \frac{1-\beta^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)} \end{aligned}$$

Veamos que $\lim \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$. Debemos demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \left|\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Si analizamos el término entre módulo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1 &= \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}\\
&= \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}\\
&\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon'>0$. Por Propiedad Arquimediana, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $1<n_0\varepsilon'$.
Sea $n\geq n_0$, entonces $1<n_0\varepsilon'\leq n\varepsilon'<n^2\varepsilon'$. Escogiendo $\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon'$, tenemos que, para todo $n\geq n_0$

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1\right| &\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\\
&\leq \varepsilon'+\varepsilon'\\
&= 2\varepsilon'\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\to 1$.

Por álgebra de límites, tenemos que $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\to 1+\alpha$, pues $\frac{\beta}{n}\to 0$. Luego, como el límite del denominador existe, necesariamente debe cumplirse que $\lim\left[(1-\alpha^2)n+(1-2\alpha\beta)+\frac{1-\beta^2}{n}\right]=0$. Como sabemos que la sucesión $s_n=n$ diverge, para que el límite exista necesariamente $(1-\alpha^2)=0$, de donde $\alpha=1$ (descartamos la solución negativa pues *a priori* sabemos que $\alpha>0$). Además es claro que $\frac{1-\beta^2}{n}\to 0$ y luego se debe tener que $\lim(1-2\beta)=0$, lo que implica que $\beta=\frac{1}{2}$. Finalmente, observemos que de una igualdad anterior tenemos que (reemplazando los valores de α y β obtenidos)

$$\sqrt{n^2+n+1}-\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{3}{4n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim n(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)) &= \lim\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\left(1+\frac{1}{2n}\right)}\\
&= \frac{\frac{3}{4}}{1+1}\\
&= \frac{3}{8}.\blacksquare
\end{aligned}$$

P5. Sean (a_n) y (b_n) tales que $\lim a_n=l$ y $\lim b_n=r$. Demuestre que $\lim\max\{a_n,b_n\}=\max\{l,r\}$.
Solución
Presentaremos dos métodos de resolver este problema.

1. Demostraremos la siguiente propiedad.

Si $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ son tales que $x\leq u\wedge y\leq v$, entonces $\max\{x,y\}\leq\max\{u,v\}$.

Dem: Supongamos que x es el máximo. Si $u=\max\{u,v\}$, se tiene por hipótesis. Si tenemos el caso contrario, es decir $v=\max\{u,v\}$, entonces $u\leq v$ y por transitividad $x\leq v$. Para el caso $y=\max\{x,y\}$ se procede análogamente.

Como sabemos que $a_n\to l$, entonces

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0'\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0')\quad |a_n-l|\leq\varepsilon.$$

Analogamente, como $b_n \to r$ se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0'') \quad |b_n - r| \leq \varepsilon.$$

Luego, eligiendo $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ obtenemos

$$(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - l| \leq \varepsilon \wedge |b_n - r| \leq \varepsilon.$$

Notemos que

$$|a_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$$

y lo mismo para b_n. Utilizando la propiedad recién probada obtenemos que

$$\max\{l - \varepsilon, r - \varepsilon\} \leq \max\{a_n, b_n\} \leq \max\{l + \varepsilon, r + \varepsilon\}.$$

Recordemos que $\max a + A = a + \max A$, luego $\forall n \geq n_0$ se tiene que

$$\max\{l, r\} - \varepsilon \leq \max\{a_n, b_n\} \leq \max\{l, r\} + \varepsilon.$$

Entonces por la propiedad del módulo recién vista concluimos que

$$|\max\{a_n, b_n\} - \max\{l, r\}| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{l, r\}$.

2. Sabemos que (P2. Guía de Ejercicios Semana 8)

$$\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|).$$

Si logramos demostrar que $|a_n - b_n| \to |l - r|$, usando álgebra de límites podremos concluir. Veamos que esto es cierto. Debemos mostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad ||a_n - b_n| - |l - r|| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Si observamos lo que está entre módulo, notamos que

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| - |l - r| &\leq |(a_n - b_n) - (l - r)| \\
&= |(a_n - l) + (r - b_n)| \\
&\leq |a_n - l| + |b_n - r| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|a_n - b_n| \to |l - r|$ y usando álgebra de límites tenemos

$$\begin{aligned}
\lim \max\{a_n, b_n\} &= \lim \left[\frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)\right] \\
&= \frac{1}{2}(l + r + |l - r|) \\
&= \max\{l, r\}. \blacksquare
\end{aligned}$$

P6. Sea $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que para todo $n, t(n) \geq n$ y a_n una sucesión con $\lim a_n = l$. Demuestre que $\lim a_{t(n)} = l$.

Solución

Como sabemos que $a_n \to l$, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|a_n - l| \leq \varepsilon$. Pero $\forall n \geq n_0$, tenemos que $t(n) \geq n_0$ y luego $|a_{t(n)} - l| \leq \varepsilon$, lo que muestra que $a_{t(n)} \to l$.$\blacksquare$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
08 de Mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 10

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.
Solución
Notemos que el denominador se escribe como $\sum_{k=1}^n u_k$. Calculemos esta suma.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(1+(-1)^k)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (1+(-1)^k)\\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sum_{k=1}^n 1}_{n} + \sum_{k=1}^n (-1)^k\right]\\ &= \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k.\end{aligned}$$

Para calcular la suma que queda, fijemonos que si n es par, entonces $\sum_{k=1}^n (-1)^k = 0$, pues estamos sumando una cantidad par de terminos de la forma $((-1)+1)$. Si n es impar, $n+1$ es par, y entonces

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k - (-1)^{n+1} = -1.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^n u_k = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ par} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Con esto intuimos que debería ser que el límite es $\frac{1}{2}$, pero debemos demostrarlo. Es decir, debemos mostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Notemos que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 0 & n \text{ par.} \\ \frac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}.$$

El Sandwich de Sucesiones implica que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| \to 0$$

es decir
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \frac{1}{2}.\blacksquare$$

P2. Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q_n^n)$, donde $(q_n) \to q$ con $|q| < 1$.
Solución
Como sabemos que $q_n \to q$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que
$$0 \leq |q_n| \leq \frac{|q|+1}{2}.$$
Elevando a la potencia n obtenemos que
$$0 \leq |q_n|^n \leq \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$
Multiplicando por n^k tenemos que
$$0 \leq n^k |q_n|^n \leq n^k \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$
Notemos que como $|q| < 1$, entonces $\frac{|q|+1}{2} < 1$. Por propiedad demostrada en el apunte sabemos que si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $|u| < 1$, entonces $n^k u^n \to 0$. Luego, por Sandwich de Sucesiones concluimos que
$$n^k q_n^n \to 0.\blacksquare$$

P3. Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $\left(\frac{1}{nh_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.
Solución
Como todos los términos de (h_n) son positivos, inmediatamente obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n}$.
De la primera desigualdad de Bernoulli tenemos
$$(1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$$
es decir
$$\frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n}.$$
Estas desigualdades son válidas pues todos los h_n son positivos. En resumen tenemos que
$$0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n}.$$
Notando que
$$\frac{1}{1+nh_n} = \frac{\frac{1}{nh_n}}{\frac{1}{nh_n}+1}$$
por la hipótesis del problema, utilizando Álgebra de Límites concluimos que $\frac{1}{1+nh_n} \to 0$ y el Sandwich de Sucesiones implica que
$$\frac{1}{(1+h_n)^n} \to 0.\blacksquare$$

P4. Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\frac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim (1-v_n)^n = 0$.
Solución
Notemos que dado que $v_n \in (0,1)$, entonces $-v_n \in (-1,0)$. Por lo tanto $0 \leq 1 - v_n$ y luego $0 \leq (1-v_n)^n$. Además, por la tercera desigualdad de Bernoulli, tenemos que
$$(1-v_n)^n \leq \frac{1}{1+nv_n}.$$
La desigualdad anterior es válida ya que $-v_n \in (-1,0) \subset \left(-1, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Análogamente al problema anterior se concluye que $\frac{1}{1+nv_n} \to 0$ y por Sandwich de Sucesiones
$$(1-v_n)^n \to 0.\blacksquare$$

P5. Sea (u_n) una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

Solución

Sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que podemos reescribir v_n como

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Para probar lo pedido, analicemos la diferencia $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{n\sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} \\
&= \frac{n(u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k) - n\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} \\
&= \frac{nu_{n+1} + n\sum_{k=1}^{n} u_k - n\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} \\
&= \frac{nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Como sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}\ n(n+1) > 0$, estudiemos qué pasa con el numerador. Sabiendo que (u_n) es creciente, tenemos que $\forall k = 1, \ldots, n\ u_k \leq u_n$ y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_n = nu_n.$$

Obtenemos que

$$nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k \geq nu_{n+1} - nu_n = n(u_{n+1} - u_n) \geq 0.$$

Esto último por el crecimiento de (u_n). Resumiendo, tenemos que $v_{n+1} - v_n \geq 0$, lo que implica que $v_{n+1} \geq v_n$. Esto muestra que (v_n) es creciente.$\blacksquare$

P6. Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a este último límite se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

Solución

Demostremos que $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (x_n - y_n)^2 \\
\iff & 0 \leq x_n^2 - 2x_n y_n + y_n^2 \\
\iff & 4x_n y_n \leq x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2 \\
\iff & 4x_{n+1}^2 \leq (x_n + y_n)^2 \\
\iff & x_{n+1}^2 \leq \frac{(x_n + y_n)^2}{4} \\
\implies & x_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1}
\end{aligned}$$

Lo que es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que y_n es decreciente. En efecto

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{x_n + y_n}{2} - y_n \\
&= \frac{x_n - y_n}{2} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Lo último pues $x_n \leq y_n$. Por lo tanto (y_n) es decreciente y además acotada inferiormente, entonces es convergente. Ahora veamos que (x_n) es creciente. Observemos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n y_n} - x_n \\ &\geq \sqrt{y_n y_n} - x_n \\ &= y_n - x_n \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto (x_n) es creciente y como es acotada superiormente, entonces es convergente. Para ver la igualdad de los límites basta notar que

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} &\Longrightarrow \lim y_{n+1} = \lim y_n = \frac{\lim x_n + \lim y_n}{2} \\ &\Longrightarrow 2 \lim y_n = \lim x_n + \lim y_n \\ &\Longrightarrow \lim y_n = \lim x_n. \end{aligned}$$

Esto es válido por Álgebra de Límites pues ambos límites existen. Recordemos que para una sucesión (s_n) creciente y acotada superiormente, su límite es $\sup\{s_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, y para una sucesión (u_n) decreciente y acotada inferiormente, su límite es $\inf\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. En particular, para (x_n) cualquier término es menor que el límite, y para (y_n) cualquier término es mayor que el límite. Así, considerando $n = 2$ tenemos que

$$\sqrt{ab} = x_2 \leq l \leq y_2 = \frac{a+b}{2}. \blacksquare$$

P7. Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}}$, con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Solución

Comencemos viendo que es acotada por b, por inducción sobre n. El caso base es trivial. Supongamos que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, verifiquemos que se cumple para el caso $n+1$. En efecto

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq b^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 + ab^2 \leq b^2 + ab^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 + ab^2 \leq (a+1)b^2 \\ &\Longleftrightarrow \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \leq b^2 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}} \leq b \\ &\Longleftrightarrow u_{n+1} \leq b. \end{aligned}$$

Donde todas son equivalencias ya que todos los términos involucrados son positivos. Para demostrar que es convergente, veamos ahora que es creciente. El razonamiento es parecido al anterior.

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq b^2 \\ &\Longleftrightarrow au_n^2 \leq ab^2 \\ &\Longleftrightarrow au_n^2 + u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\ &\Longleftrightarrow (a+1)u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq \frac{u_n^2 + ab^2}{a+1} \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n \leq u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donde nuevamente todo es equivalencia por las mismas razones. Como (u_n) es una sucesión monótona y acotada, entonces es convergente. Llamemos $\ell = \lim u_n$. Para calcular el valor de

ℓ notemos que $u_{n+1}^2 = \frac{ab^2+u_n^2}{a+1}$ y entonces tomando límite obtenemos que

$$\begin{aligned}
\ell^2 = \frac{ab^2+\ell^2}{a+1} &\iff (a+1)\ell^2 = ab^2+\ell^2 \\
&\iff (a+1)\ell^2 - \ell^2 = ab^2 \\
&\iff \ell^2(a+1-1) = ab^2 \\
&\iff a\ell^2 = ab^2 \\
&\iff \ell^2 = b^2 \\
&\iff \ell = b.
\end{aligned}$$

La razón de las equivalencias es análoga a lo anterior.■

Nota: Queda como ejercicio para el lector verificar que $s_n \to s \implies s_n^2 \to s^2$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
03 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 11

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcule

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Solución
Notemos que

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \ln(k+1)-\ln(k).\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la suma obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k)$$

que es una suma telescópica cuyo valor es $\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$. Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Por otra parte, por propiedades del logaritmo tenemos que $\frac{1}{n}\ln(n+1)=\ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right)$ y como sabemos que $\sqrt[n]{n+1}\to 1$, por propiedad demostrada en el apunte $\ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right)\to\ln(1)=0.\blacksquare$

P2. Demuestre que $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ e $y_n=x_n-\frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

Solución
Comencemos viendo el crecimiento de (x_n). Para ello, analicemos el signo de la diferencia de términos sucesivos, es decir

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n)\\ &= \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

en donde para la última igualdad se han utilizado las propiedades del logaritmo.

De la Desigualdad Fundamental para el logaritmo sabemos que

$$\ln(x)\le x-1,\quad \forall x>0.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\le\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}-1=\frac{1+n-n-1}{n+1}=0$$

es decir

$$x_{n+1}-x_n\le 0.$$

Por lo tanto (x_n) es decreciente. Si demostramos que (x_n) es acotada inferiormente, tendremos que es convergente. En efecto, veamos que $0 < x_n, \forall n \geq 2$.

En primer lugar notemos que de la Desigualdad Fundamental del logaritmo obtenemos que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Si sumamos estas desigualdades tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

pero del problema anterior sabemos que la suma de la izquierda vale $\ln(n)$, y así

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Observemos que la suma restante la podemos reescribir como

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} &\Longrightarrow \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = x_n \\ &\Longrightarrow 0 \leq x_n. \end{aligned}$$

Se sigue que como (x_n) es decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente.

Nota: Este límite se conoce como la constante de Euler-Mascheroni y se suele anotar como γ.

Analicemos ahora la sucesión (y_n). De su definición es directo que $y_n \leq x_n$, en particular, $y_n \leq \gamma$. Si logramos demostrar que es creciente, tendremos que es convergente. Con este fin, estudiemos la diferencia de términos sucesivos

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(x_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Notando que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Nuevamente la Desigualdad Fundamental del logaritmo nos dice que $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n}$ y entonces

$$y_{n+1} - y_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

En conclusion, (y_n) es creciente y como teníamos que es acotada superiormente, converge.

Para ver que los límites son iguales basta notar que

$$y_n = x_n - \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim y_n = \lim x_n - \lim \frac{1}{n} = \lim x_n. \blacksquare$$

P3. Para $x > 0$, calcule $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$.
Solución
En primer lugar notemos que $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$, y por lo tanto $n(\sqrt[n]{x} - 1) = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1\right)$. Buscaremos calcular el límite usando el límite conocido

$$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1$$

donde $a_n \to 0$. En efecto, notemos que $\frac{1}{n}\ln(x) \to 0$ y además que

$$\begin{aligned} n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1\right) &= n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{\frac{1}{n}\ln(x)}{\frac{1}{n}\ln(x)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1}{\frac{1}{n}\ln(x)} \cdot \ln(x). \end{aligned}$$

En conclusión, por Álgebra de Límites tenemos que $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x). \blacksquare$

P4. Calcule $\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a 0.
Solución
Notemos que

$$(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + a_n)}{\exp(2a_n) - 1}\right).$$

Observemos que se puede reescribir el argumento de la exponencial como

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + a_n)}{\exp(2a_n) - 1} &= \frac{\ln(1 + a_n)}{2a_n} \cdot \frac{2a_n}{\exp(2a_n) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \cdot \frac{2a_n}{\exp(2a_n) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \cdot \frac{1}{\frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n}}. \end{aligned}$$

Como sabemos que $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1$ y $\frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n} \to 1$ cuando $a_n \to 0$, por Álgebra de Límites concluimos que $\frac{\ln(1+a_n)}{\exp(2a_n)-1} \to \frac{1}{2}$, y por propiedad demostrada en el apunte

$$\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}} = \sqrt{e}. \blacksquare$$

P5. Las tasas de interés de tres instituciones son 6% anual, 0,5% mensual y $100(e^{0,3\alpha} - 1)\%$ cada cinco años, respectivamente. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco años, para los siguientes valores de α: $0, 1$ y $\ln(3)$. Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interes es $t\%$, entonces el capital aumenta en ese periodo en un factor $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
Solución
Si llamamos C_0 al capital inicial, entonces para cada institución tenemos que el capital luego de cinco años será

- 6% anual $\longrightarrow C_f = C_0\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5$
- 0,5% mensual $\longrightarrow C_f = C_0\left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{60}$
- $100(e^{0,3\alpha} - 1)\%$ cada cinco años $\longrightarrow C_f = C_0\left(1 + \frac{100(e^{0,3\alpha}-1)}{100}\right) = C_0 e^{0,3\alpha}$.

Recordando que para la exponencial tenemos $x+1 \leq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ obtenemos, para las primeras dos instituciones

- $C_0\left(1+\frac{6}{100}\right)^5 \leq C_0\left(e^{6/100}\right)^5 = C_0 e^{0,3}$
- $C_0\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{60} \leq C_0\left(e^{0,5/100}\right)^6 0 = C_0 e^{0,3}$

Luego, si $\alpha \geq 1$ tenemos que la tercera institución proporciona una mayor rentabilidad. Si $\alpha = 0$, la tercera institución no presenta utilidad y luego será la última en el ranking.

Para ver como se comparan las otras dos instituciones notemos en primer lugar que su rentabilidad no depende de α, por lo que podemos evaluar numéricamente obteniendo

- $\left(1+\frac{6}{100}\right)^5 \approx 1,34$
- $\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{60} \approx 1,35$

Por ende, la segunda institución siempre da mayor rentabilidad que la primera.

En resumen, dependiendo de α tenemos lo siguiente

	Valor de α		
Lugar	0	1	$\ln 3$
1^{er}	2	3	3
2^{do}	1	2	2
3^{er}	3	1	1

P6. Para la función $f(x) = \ln(1+e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
Solución
Rápidamente notamos que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Para ver los ceros de f debemos resolver la ecuación $\ln(1+e^x) = 0$ en el dominio de f. No es dificil verificar que esta ecuación no posee solución, pues $f(x) = 0 \iff 1 + e^x = 0$ y sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x \geq 0$. Luego f no tiene ceros, es decir, $Z(f) = \phi$.

Trivialmente, f es creciente por ser composición de funciones crecientes. Además f es siempre positiva, pues $f(x) < 0 \iff 1 + e^x < 1 \implies e^x < 0$ lo que no es posible.

Supongamos que y es tal que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución. Si despejamos x obtenemos

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln(1+e^x) \\ &\iff e^y = 1 + e^x \\ &\iff e^y - 1 = e^x \\ &\iff \ln(e^y - 1) = x. \end{aligned}$$

Notemos que para que esto tenga sentido, debe ser que $e^y - 1 > 0$, es decir, $e^y > 1 \implies y > 0$. Luego, la ecuación tiene solución sólo si $y > 0$. Con todo lo anterior, y observando que

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & \tilde{f}(x) = f(x) \end{array}$$

es biyectiva, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1). \end{array}$$

Repitiendo el proceso para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, observamos que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Para encontrar los ceros de f, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, con $x \in \operatorname{Dom} f$. Así

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \\ &\iff e^x = e^{-x} \\ &\iff e^{2x} = 1 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $Z(f) = \{0\}$.

Es fácil ver que f es creciente, por ser álgebra de funciones crecientes.

Notemos que f es impar, y entonces sólo nos basta analizar el intervalo $(0, +\infty)$. Para ver dónde es positiva, debemos resolver la inecuación $f(x) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

Luego, f es positiva en $(0, +\infty)$ y por imparidad es negativa en $(-\infty, 0)$.

Sea ahora un y tal que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución. Si despejamos x tenemos

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff 2y = e^x - e^{-x} \\ &\iff 2ye^x = e^{2x} - 1 \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Llamemos $u = e^x$, entonces tenemos la ecuación $u^2 - 2uy - 1 = 0$ que es cuadrática en u y resolviendo

$$u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

y recordando que $x = \ln u$ obtenemos

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

donde descartamos la solución negativa pues $\ln x$ está definida solamente para números positivos.

Observemos que f es biyectiva tal como está definida y luego tiene sentido

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Observación: La función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ *se llama Seno Hiperbólico y se anota* $\operatorname{senh} x$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
03 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 12

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Demuestre que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas oblicuas de las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

Solución

En primer lugar, notemos que necesitamos tener la hipérbola como una función de x. Para obtener la forma deseada, podemos despejar y de la ecuación y pensar que $y = y(x)$ y aplicar definición de asíntota. Para simplificar un poco los cálculos, trabajaremos con la hipérbola definida por la ecuación con 1, el caso para -1 es análogo y queda propuesto al lector. Despejando entonces

$$y(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Para ver que las rectas $\pm\frac{b}{a}x$ sólo debemos mostrar que (por definición)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[y(x) \mp \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

La razón del límite hacia $\pm\infty$ es que, como $y(x)$ tiene dos 'partes', una asíntota corresponderá al límite hacia $+\infty$ y la otra hacia $-\infty$. Veamos esto en un dibujo:

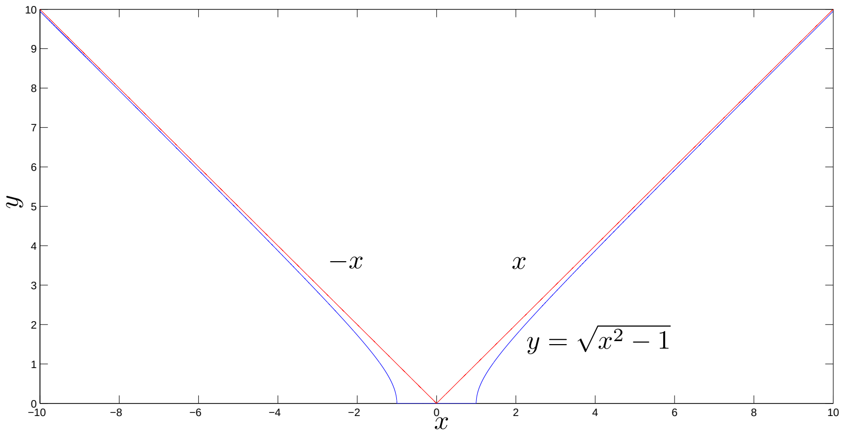


Figura 1: Gráfico de la hipérbola para $a = b = 1$.

Calculemos entonces el límite, para esto observemos que

$$\begin{aligned}
y(x) \mp \frac{b}{a}x &= \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x \\
&= \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x\right) \cdot \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \pm \frac{b}{a}x}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \pm \frac{b}{a}x} \\
&= \frac{b}{a}\left(\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x}\right) \\
&= \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[y(x) \mp \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

Los demás casos son análogos y se dejan como ejercicio.

P2. Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, demuestre que el dominio A de f permite estudiar el límite de f cuando $x \to x_0^+$ ssi existe al menos una sucesión (s_n) en A que cumple $s_n \to x_0$ y $s_n > x_0,\ \forall n$.

Use este resultado para estudiar si en los siguientes casos, los dominios de las funciones permiten o no estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$

(a) $A = (x_0, x_0 + 1)$

(b) $A = \{x_0 + \frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$

(c) $A = \{x_0 + \frac{n}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$

(d) $A = \{x_0 + \frac{m+n}{mn}\ :\ n, m \in \mathbb{N}\}$

(e) $A = (x_0, x_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$

(f) $A = \mathbb{Q}$

(g) $A = \{x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\ :\ n \in \mathbb{N}\}$

Solución
Demostremos la doble implicancia:

- $\Longrightarrow$) Como sabemos que f permite estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$, tenemos que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta].$$

Como es para todo $\delta > 0$, consideremos la sucesión $\delta_n = \frac{1}{n}$ decreciente y convergente a 0. Luego, para cada δ_n podemos encontrar $s_n \in A \cap (x_0, x_0 + \delta_n]$. Notemos que por estar en la intersección, $s_n \in A$ y además $s_n > x_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ (pues $s_n \in (x_0, x_0 + \delta_n]$).
Para ver la convergencia, tomemos $\varepsilon > 0$. Observemos que como $s_n \in (x_0, x_0 + \delta_n]$, entonces $s_n - x_0 \in (0, \delta_n]$ de donde concluimos que

$$0 \leq |s_n - x_0| \leq \delta_n$$

y por Sandwich de Sucesiones deducimos que $s_n \to x_0$.

- $\Longleftarrow$) Dado que $s_n \to x_0$ sabemos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad s_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

y puesto que $s_n \in A$ tenemos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad s_n \in A \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Pero por hipótesis $s_n > x_0$ y luego $s_n \notin [x_0 - \varepsilon, x_0]$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad s_n \in A \cap (x_0, x_0 + \varepsilon]$$

y si elegimos $\delta = \varepsilon$ tenemos que

$$\forall \delta > 0, \exists x = s_{n_0} \in A \cap (x_0, x_0 + \delta]$$

lo que significa que A permite estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$.

Estudiemos los conjuntos propuestos

(a) Sí permite, pues podemos tomar por ejemplo $s_n = x_0 + \frac{1}{n+1}$. Notemos que no podemos tomar $s_n = x_0 + \frac{1}{n}$, pues $s_1 \notin A$.

(b) Sí permite. Tomamos $s_n = x_0 + \frac{1}{n}$.

(c) No permite, pues cualquier sucesión (s_n) que podamos tomar no convergerá a x_0, puesto que deberá ser de la forma

$$s_n = x_0 + \frac{n}{n+1} \to x_0 + 1.$$

(d) Si $m \neq n$, A permite estudiar el límite, pues una sucesión en el conjunto será de la forma

$$s_{n,m} = x_0 + \frac{m+n}{mn} = x_0 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Esto bajo el supuesto que n y m se pueden mover libremente hacia el infinito, ya que en la definición de A no se impone la restricción de que alguno sea fijo. Por otro lado, si $m = n$, A sí permitirá estudiar el límite pues podemos elegir

$$s_n = x_0 + \frac{2n}{n^2} = x_0 + \frac{2}{n} \to x_0$$

y además cumple las hipótesis necesarias.

(e) Sí permite, pues por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, siempre podemos tomar una sucesión racional tal que $s_n \to x_0$ (independiente de si x_0 es racional o no).

(f) Permite, por las mismas razones anteriores.

(g) Sí permite pues $s_n = x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \to x_0$ y verifica todo lo pedido pues, para $\theta \approx 0$ se tiene la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$. Esto implica que, en el límite $x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \approx x_0 + \frac{1}{n}$, y esta última sucesión sí cumple las hipótesis.

P3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Usando la definición de límite cuando $x \to +\infty$, demuestre que

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), \ell\} = \ell$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\left\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\right\} = \ell^+$.

Solución

- Como sabemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, entonces por definición de convergencia de f tenemos
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \geq m) \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$
y similarmente para g
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m' > 0)(\forall x \geq m') \quad |g(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
Luego, si $m'' = \max\{m, m'\}$ entonces $\forall x \geq m''$ se tiene que
$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \wedge |g(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
Notemos que
$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$
y lo mismo para g. Luego, por propiedad de máximo, se tiene que
$$\max\{\ell - \varepsilon, \ell - \varepsilon\} \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \max\{\ell + \varepsilon, \ell + \varepsilon\}.$$
En conclusión, tenemos que $\forall x \geq m''$
$$\ell - \varepsilon \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \ell + \varepsilon \iff |\max\{f(x), g(x)\} - \ell| \leq \varepsilon$$
de donde se deduce que
$$\lim_{x\to+\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell.$$
- Claramente esto es una consecuencia de lo probado anteriormente considerando $g(x) = \ell$.

- Para probar que el límite vale ℓ^+, debemos demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \max\left\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\right\} = \ell$ y que $\max\left\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\right\} > \ell$. Es claro que la segunda condición es cierta por definición de máximo, y el límite se concluye de la primera parte, tomando $g(x) = \ell + \frac{1}{x} \to \ell$.

P4. Demuestre que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad

$$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Verifique que las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la propiedad pero $f(x) = x^2$ no.
Solución
Dada la propiedad, notemos que tomando $x_1 = x_0$ y $x_2 = x_0 + \frac{1}{u}$ se tiene que

$$0 \leq \left| f(x_0) - f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right)\right| \leq L\left|x_0 - x_0 - \frac{1}{u}\right| = L\left|\frac{1}{u}\right|$$

y tomando límite en $u \to +\infty$, por Sandwich concluimos que

$$\lim_{u\to+\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = f(x_0)$$

es decir

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

El límite hacia x_0^- se concluye análogamente considerando $x_2 = x_0 - \frac{1}{u}$.

- Veamos que $f(x) = x$ cumple la propiedad. En efecto, notemos que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces

  $$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall L \geq 1.$$

  En particular, tomando $L = e^\pi$, se concluye.
- Veamos que $f(x) = \operatorname{sen} x$ verifica la propiedad. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, notemos que

  $$|\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)| = \left|2\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \leq \left|2\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \leq |x_1 - x_2|$$

  de donde se obtiene que $L = 1$ cumple lo pedido.
- Por otra parte, $f(x) = x^2$ no cumple la propiedad, pues si la cumpliera, tendríamos que $\exists \bar{L} > 0$ tal que

  $$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \leq \bar{L}|x_1 - x_2| \iff |x_1 + x_2| \leq \bar{L}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

  Pero tomando $x_1 = x_2 = \bar{L}$ concluiríamos que $2\bar{L} \leq \bar{L}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no cumple la propiedad.

Nota: Esta condición se llama Lipschitzianidad (en honor a Rudolph Lipschitz) de una función. Se dice que una función que cumple la condición es Lipschitz de constante L, o simplemente L-Lipschitz.

P5. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Pruebe que

(a) $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

(b) $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ si (q_n) es una sucesión que converge a x_0 tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $q_n > x_0$, entonces $\lim f(q_n) = f(x_0)$.

(c) $(\forall q \in \mathbb{Q})$ se cumple $f(q) = qf(1)$.
Indicación: pruebe por inducción la fórmula para $q \in \mathbb{N}$, y luego extiéndala a $q \in \mathbb{Z}$ y $q = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$.

(d) $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple $f(x_0) = x_0 f(1)$.
Indicación: use la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$.

Solución

(a) Notemos que:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{u \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to \infty} \left[f(x_0) + f\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

En este punto, notamos que $\lim_{u \to \infty} f(\frac{1}{u}) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, que sabemos que existe. Luego, por álgebra de límites:

$$\lim_{u \to \infty} \left[f(x_0) + f\left(\frac{1}{u}\right)\right] = \lim_{u \to \infty} f(x_0) + \lim_{u \to \infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to \infty} f(x_0) + \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(x_0) + f(0).$$

Vemos que probando que $f(0) = 0$, llegaríamos al resultado. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+0) = f(0) + f(0) \qquad \text{(Propiedad de } f\text{)} \\ &\Longrightarrow f(0) = f(0) + f(0) \\ &\Longleftrightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

Así, uniendo todo lo anterior, hemos demostrado que, $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

(b) Observemos que $q_n \to x_0^+$, y entonces $q_n - x_0 \to 0^+$. Antes de seguir, probemos las siguientes propiedades

- $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(-x) = -f(x)$. Basta notar que $f(0) = 0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ de donde se concluye.
- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$. Del hecho que $f(x_1 - x_2) = f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) + f(-x_2)$ y de la propiedad anterior se concluye.

Teniendo esto, observemos que $f(q_n - x_0) = f(q_n) - f(x_0)$ y luego $\lim f(q_n) - f(x_0) = \lim f(q_n - x_0)$. Si logramos demostrar que teniendo una sucesión $a_n \to 0^+$, entonces $\lim f(a_n) = 0$ podremos concluir. Notemos que esta propiedad no es equivalente a la propiedad del enunciado, porque aquí estamos tomando límite de sucesiones.
Sea entonces $a_n \to 0^+$, esto quiere decir que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y además

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n \leq \epsilon.$$

Por otra parte, sabemos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ o equivalentemente $\lim_{u \to +\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = 0$, esto quiere decir que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall u \geq m) \quad \left|f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Debemos demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0') \quad |f(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, luego $\exists m > 0$ tal que $\left|f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \leq \varepsilon$, $\forall u \geq m$. Pero de la convergencia de a_n, tenemos que para $\epsilon = \frac{1}{m}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq \frac{1}{m}$, es decir $\frac{1}{a_n} \geq m$, $\forall n \geq n_0$. Luego tomando $n_0' = n_0$ tenemos que $\forall n \geq n_0'$, $\frac{1}{a_n} \geq m$ y luego

$$\left|f\left(\frac{1}{\frac{1}{a_n}}\right)\right| = |f(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que $\lim f(a_n) = 0$.
De aquí podemos concluir que $\lim f(q_n) - f(x_0) = \lim f(q_n - x_0) = 0$, de donde se deduce que $\lim f(q_n) = f(x_0)$.

(c) Sigamos la indicación. Comencemos probando la propiedad para el caso $q \in \mathbb{N}$ por inducción. El caso base es directo, ya que $f(1) = 1f(1)$. Supongamos ahora que se tiene para $n \in \mathbb{N}$, y busquemos probar que también se tiene para el caso $n+1$. En efecto, tenemos que:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1).$$

Por lo tanto, la propiedad se tiene para los números naturales.
Extendamos ahora la propiedad para los enteros. Aquí tenemos dos casos, si $q \in \mathbb{Z}$ es tal que $q > 0$, tenemos exactamente el caso anterior. Para el caso $q < 0$, usando que $f(q + (-q)) = f(0) = 0$, notemos que:

$$f(q + (-q)) = f(q) + f(-q) = 0 \Longrightarrow f(q) = -[f(-q)].$$

Y como $q < 0 \Longrightarrow -q > 0$, concluimos que:

$$f(q) = -[-qf(1)] = qf(1),$$

por lo que tenemos la propiedad, $(\forall q \in \mathbb{Z})$.
Ahora, probemos la propiedad para $q = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Para esto, notemos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. Por lo tanto, aplicando la función en la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\right) = f(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \qquad \text{(Propiedad de } f\text{)} \\
&\Longleftrightarrow \quad nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \\
&\Longleftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1) \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Con esto, para concluir el caso general, notemos que $q \in \mathbb{Q}$ se puede escribir de la forma $q = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
Probaremos primero el caso para $m > 0$. Notemos que $\frac{m}{n} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n}$, y por la propiedad que cumple la función, tenemos que

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right),$$

y por la propiedad $(\star)$, se concluye que $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} f(1)$, $(\forall m > 0)$.
Para el caso $m < 0$, se procede de forma similar, pero para que tenga sentido el límite superior de la sumatoria, recurrimos a expresar la fracción como $\frac{m}{n} = -\sum_{i=1}^{-m} \frac{1}{n}$. El resto de la demostración, queda como ejercicio para el lector.
Con todo lo anterior, queda demostrado que $(\forall q \in \mathbb{Q})$, $f(q) = qf(1)$.

(d) Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ podemos construir una sucesión q_n tal que $q_n \to x_0^+$ y $q_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por la parte anterior $f(q_n) = q_n f(1)$ y por ende

$$\lim f(q_n) = \lim q_n f(1) = \lim q_n \cdot \lim f(1) = x_0 f(1).$$

Para concluir notemos que nos falta verificar que $\lim f(q_n) = f(x_0)$, pero esto lo probamos en la parte (b). Por lo tanto

$$f(x_0) = x_0 f(1). \blacksquare$$

P6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que verifican:

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2)$$

(a) Muestre que $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$, $g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2)$.

(b) Probar que si g es una función acotada entonces $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

(c) Probar que si

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = g(a)$$

entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -g(a).$$

Solución

(a) De la propiedad enunciada, obtenemos directamente que

$$f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2) \Longleftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2).$$

Ahora, como sabemos que la propiedad se cumple para cualquier valor de x, invirtiendo la posición de x_1 y x_2, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2)(x_2 - x_1) &\Longleftrightarrow -g(x_2)(x_2 - x_1) \geq f(x_2) - f(x_1) \\ &\Longleftrightarrow g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1). \end{aligned}$$

Y finalmente, uniendo ambas desigualdades, podemos concluir que, $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$:

$$g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2).$$

(b) Como g es acotada, tenemos que $(\exists M, m \in \mathbb{R})$ tales que $m \leq g(x) \leq M$, $(\forall x \in \mathbb{R})$. De la parte anterior,

$$g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2),$$

y como esto se cumple para todo valor de x_1 y x_2, tomemos en particular a $x_1 = x_0$, y $x_2 = x_0 + \frac{1}{u}$. Así,

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad g\left(x_0 + \frac{1}{u}\right)\left(x_0 - x_0 - \frac{1}{u}\right) \geq f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) - f(x_0) \geq g(x_0)\left(x_0 - x_0 - \frac{1}{u}\right) \\ &\Longrightarrow \quad M\left(-\frac{1}{u}\right) \geq f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) - f(x_0) \geq m\left(-\frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

De donde, tomando el límite cuando $u \to \infty$, concluimos por Teorema del Sandwich que

$$\lim_{u\to\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = f(x_0),$$

lo que, denotando $x = x_0 + \frac{1}{u}$, equivale a decir que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Considerando ahora $x_1 = x_0$ y $x_2 = x_0 - \frac{1}{u}$, y procediendo en forma análoga a lo anterior, se concluye que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Por ende, hemos demostrado que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

(c) De la primera parte, considerando $x_1 = x = a + \frac{1}{u}$ y $x_2 = a$,

$$\begin{aligned} g(x)(x-a) \leq f(a) - f(x) &\leq g(a)(x-a) \\ g(x) \leq \frac{f(a)-f(x)}{x-a} &\leq g(a) \\ -g(x) \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &\geq -g(a), \end{aligned}$$

donde $x - a = \frac{1}{u} > 0$, por lo que pudimos dividir sin problemas, y manteniendo la desigualdad. Luego, tomando el límite cuando $x \to a^+$, concluimos por Teorema del Sandwich, que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -g(a).$$

Para el caso de $x \to a^-$, el proceso es análogo, salvo porque, aquí, $x - a < 0$ y se debe invertir la desigualdad al momento de dividir. De todas formas, esto queda como ejercicio para el lector. Hecho esto, queda demostrado que:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -g(a).$$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
17 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 13

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcule los siguientes límites, si es que existen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi))$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x}$.

Solución:

(a) Realizando un cambio de base, para trabajar sólo con logaritmos naturales, tenemos que

$$(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)) = \frac{\ln(2)}{\ln(1+x)} + \frac{\ln(\pi)}{2\ln(1+x)}.$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)) &= \lim_{x\to 0} x\left(\frac{\ln(2)}{\ln(1+x)} + \frac{\ln(\pi)}{2\ln(1+x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}\right)\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)\end{aligned}$$

Y finalmente, recordando que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}\right)\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right) = \ln(2\sqrt{\pi}).$$

(b) Observamos que $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = \sqrt{1}$ propiamente, y por teorema de la composición, concluimos que $\lim\limits_{x\to 1}\cos(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{1})$. Repitiendo el argumento, podemos asegurar en forma análoga que $\lim\limits_{x\to 1}\ln(\cos(\sqrt{x})) = \ln(\cos(\sqrt{1}))$. Finalmente, por álgebra de límites, concluimos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x} = \ln(\cos(\sqrt{1})).$$

(c) Desarrollando la expresión, notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(2)} - e^{x\ln(3)}}{\ln(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(2)} - e^{x\ln(3)} - 1 + 1}{\ln(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln(2)} - 1}{\ln(1+x)} - \frac{e^{x\ln(3)} - 1}{\ln(1+x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{x\ln(2)} - 1)}{x\ln(2)}\frac{x}{\ln(1+x)}\ln(2) - \frac{(e^{x\ln(3)} - 1)}{x\ln(3)}\frac{x}{\ln(1+x)}\ln(3)\right)\end{aligned}$$

Y dado que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln(2)}-1)}{x\ln(2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln(3)}-1)}{x\ln(3)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, por álgebra de límites, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

(d) Nuevamente, desarrollemos la expresión hasta llegar a límites conocidos.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x - 1 + 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - 1}{\operatorname{sen}(x)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right)
\end{aligned}$$

Y ya que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)}-1}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, por álgebra de límites, se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x} = 1 - 1 = 0.$$

P2. Determine la existencia de $\lim\limits_{x\to x_0} [x]x$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solución:
Intentemos descartar algunos puntos. Si consideramos $x_0 \in \mathbb{Z}$, notemos que

$$\lim_{x\to x_0^-} [x]x = \lim_{u\to+\infty} \left[x_0 - \frac{1}{u}\right] \left(x_0 - \frac{1}{u}\right) = (x_0 - 1)x_0.$$

Y por otro lado

$$\lim_{x\to x_0^+} [x]x = \lim_{u\to+\infty} \left[x_0 + \frac{1}{u}\right] \left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = x_0^2.$$

Así, notamos que el único número en $\mathbb{Z}$ que verifica la igualdad de estas expresiones es $x_0 = 0$. Por lo tanto, concluimos que el límite no existe, $(\forall x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Ahora, para considerar a los elementos que nos quedan en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, consideremos $x_0 \in (m, m+1)$, $(\forall m \in \mathbb{Z})$, y calculemos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to x_0^-} [x]x = \lim_{u\to+\infty} \left[x_0 - \frac{1}{u}\right] \left(x_0 - \frac{1}{u}\right) = [x_0]x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} [x]x = \lim_{u\to+\infty} \left[x_0 + \frac{1}{u}\right] \left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = [x_0]x_0.$$

Lo que implica que, $\forall x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} [x]x$ existe, y más aún:

$$\lim_{x\to x_0} [x]x = [x_0]x_0.$$

P3. Sea f una función tal que $f(x) \geq 1$ para todo $x \geq 0$ y $f(x) \leq 0$ para todo $x < 0$. Determine cuáles de los siguientes límites nunca pueden existir: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solución:
Dadas las condiciones del problema, vemos directamente que los límites laterales a $x = 0$ verificarían lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \leq 0.$$

Por lo tanto, nunca se dará que los límites laterales sean iguales, lo que nos permite concluir que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ jamás podrá existir.

P4. Determine para qué valores de a el siguiente límite existe: $\lim\limits_{x\to 0} |x|^a(1-e^x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solución:
Desarrollemos la expresión:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} |x|^a(1-e^x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} -|x|^a(e^x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0} -|x|^a\frac{(e^x-1)}{x}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Y recordando que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}=0$, concluimos que el límite pedido existe si y sólo si $\lim\limits_{x\to 0}|x|^a$ existe, lo que sólo ocurre si $a\geq 0$.

P5. Calcule $\lim\limits_{v\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(v)}{v}$, demostrando que para todo $v\in[0,1]$, $0\leq \operatorname{arcsen}(v)\leq\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ y aplicando el Teorema del Sandwich.

Solución:
Recordemos que, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ se tiene que $\operatorname{sen}(x)\leq x\leq \operatorname{tg}(x)$. Si hacemos el cambio de variables $v=\operatorname{sen}(x)$, observamos en primer lugar que $v\in[0,1]$. Además, reescribiendo la desigualdad anterior se tiene

$$v\leq\operatorname{arcsen}(v)\leq\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(v)).$$

Por otra parte, observemos que $\operatorname{tg}(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$. En resumen

$$\forall v\in[0,1]\quad v\leq\operatorname{arcsen}(v)\leq\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Luego, si dividimos por v obtenemos

$$1\leq\frac{\operatorname{arcsen}(v)}{v}\leq\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

y por teorema del Sandwich, haciendo $v\to 0$ concluimos que

$$\lim_{v\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(v)}{v}=1.$$

P6. Usando la definición de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(x)=\frac{\pi}{2}$$

Para $\varepsilon>0$, escoja $m=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$. Recuerde que arctg es creciente y acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$.

Solución:
Como se pide demostrar el límite por definición, debemos probar que

$$(\forall\varepsilon>0),(\exists m>0),\forall x\in[m,+\infty),\ \left|\operatorname{arctg}(x)-\frac{\pi}{2}\right|\leq\varepsilon.$$

Siguiendo la indicación, dado $\varepsilon>0$, consideremos $m=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$. Luego, para $x\geq m$, y dado que la función arctg es creciente, tenemos que

$$x\geq\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\Longrightarrow\operatorname{arctg}(x)\geq\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

y ocupando la última información presente en la indicación, notemos que, para todo x,

$$\operatorname{arctg}(x)\leq\frac{\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}+\varepsilon.$$

Por lo tanto, uniendo la información recolectada:

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \operatorname{arctg}(x) \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

lo que justamente quiere decir que

$$\left|\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon,$$

de donde se concluye lo que queríamos demostrar.

P7. Calcule todas las asíntotas de la siguiente función y determine si $\lim\limits_{x\to 0}$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & 1 < x \end{cases}$$

Solución:
Comencemos calculando las asíntotas horizontales. Directamente, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

de donde vemos que $\frac{2+x+x^2}{1-x^2} \to -1$, y $e^{-\frac{1}{x^2}} \to 1$. Luego, por álgebra de límites, concluimos que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal de f en $+\infty$. Ahora, calculemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(-x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\operatorname{arctg}(x) \\ &= -\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De donde se concluye que la recta $y = -\frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal de f en $-\infty$.

Calculemos ahora las asíntotas verticales. Notemos que los únicos lugares donde podrían existir es justo donde se cambia la definición de la función. Siendo así, debemos calcular los límites para $x \to 0^+$, $x \to 1^-$ y para $x \to 1^+$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{(x-1)} = -1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{(x-1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty.$$

Luego, concluimos que la recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función.

Ahora, veamos la posible existencia de asíntotas oblicuas. Para esto, calculemos m para cada una de ellas:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x+x^2}{x-x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))} = \lim_{u\to-\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\operatorname{tg}(u)} = \lim_{u\to-\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)} = 0.$$

Y notemos que al calcular n_1 y n_2, volveremos a obtener las asíntotas horizontales de la función (lógico, ya que las pendientes de las posibles oblicuas dieron cero). Por lo tanto, f no posee asíntotas oblicuas.

Finalmente, veamos si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe. Para esto, notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{1}{(x-1)} = -1,$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(x) = 0.$$

Luego, como los límites laterales son distintos, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

P8. Sea f una función tal que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ y sea $g(x) = \operatorname{sen}(x)f(x)$. Demuestre que si $\ell = 0$ entonces $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$ y que si $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ existe, entonces $\ell = 0$.

Solución:
El primer resultado es directo (nula por acotada).

Para la segunda implicancia pedida, usaremos el truco utilizado en el apunte para demostrar que $\operatorname{sen}(x)$ no posee límite.
Así, definiendo $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ y $b_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, notemos que $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$, y además,

$$g(a_n) = \operatorname{sen}(a_n)f(a_n) = f(a_n) \quad \wedge \quad g(b_n) = \operatorname{sen}(b_n)f(b_n) = -f(b_n).$$

Luego, como sabemos que g posee límite para $x \to +\infty$, evaluando para a_n y b_n, tenemos lo siguiente:

$$\lim g(a_n) = \lim f(a_n) = \ell \quad \wedge \quad \lim g(b_n) = \lim -f(b_n) = -\lim f(b_n) = -\ell.$$

Y finalmente, por la unicidad del límite, se debe cumplir que $\ell = -\ell$, lo que sólo se tiene si $\ell = 0$.

P9. Demuestre que para todo polinomio $p(x)$ se cumple que $\lim_{x\to +\infty} p(x)e^{-x} = 0$.

Solución:
En primer lugar demostremos que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad \lim_{x\to +\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Para esto tomemos $k \in \mathbb{N}$. Notemos que podemos escribir $e^x = \left(e^{\frac{x}{k+1}}\right)^{k+1}$ y aplicando la desigualdad de la exponencial a $e^{\frac{x}{k+1}}$ tenemos que

$$\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq e^x.$$

Además, como estamos tomando límite hacia $+\infty$ tendremos que $x > 0$ y luego

$$0 \leq \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{x^k}{\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}}.$$

Notando que en el lado derecho tenemos una división de Polinomios con el grado del numerador menor que el del denominador, por Teorema del Sandwich concluimos que

$$\lim_{x\to +\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Ahora, dado que un polinomio cualquiera se escribe como

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

vemos que

$$p(x)e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x}$$

y utilizando Álgebra de Límites concluimos que

$$\lim_{x\to +\infty} p(x)e^{-x} = 0. \blacksquare$$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
24 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 14

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Un cuerpo lanzado al vacío, formando con la horizontal un ángulo α, describe una trayectoria parabólica por acción de la gravedad cuyas ecuaciones son $x = v_0 \cos(\alpha)$t, $y = v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$, determinar la dirección del movimiento para los primeros 5 segundos, siendo $\alpha = 60$, $v_0 = 50\frac{m}{s}$, bosquejar.

Solución

Notemos que, para obtener la dirección del movimiento en cada punto pedido, necesitamos la pendiente de la recta tangente a la función en ellos. El problema es que la derivada que necesitamos para esto, es la de y con respecto a x, vale decir, $\frac{dy}{dx}$, pero sólo tenemos expresiones del estilo $x(t)$ e $y(t)$. Para solucionar esto, recordemos la regla de la cadena, que nos indica lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Teniendo esto en mente, calculemos las derivadas necesarias, y despejemos lo que buscamos:

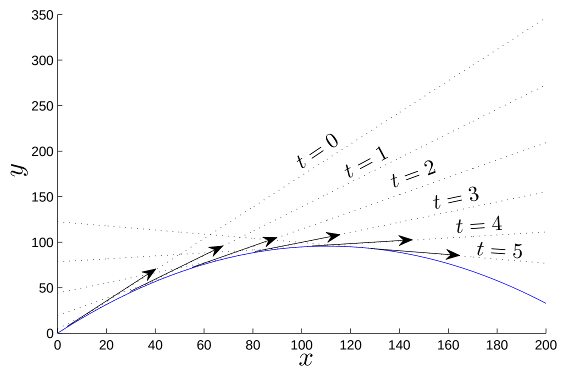
$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = v_0 \cos(\alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - gt.$$

En conclusión

$$v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - gt = \frac{dy}{dx} \cdot v_0 \cos(\alpha) \iff \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{gt}{v_0 \cos(\alpha)}.$$

Y con esta expresión, podemos encontrar la dirección en los primeros 5 segundos, lo que se expresa en la figura siguiente:



P2. En un triangulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. Si consideramos que b, c son constantes y α variable, demostrar que $\frac{da}{d\alpha} = h_\alpha$, en que h_α es la altura del triángulo correspondiente a la base a. Interpretar el resultado geométrico de este resultado.

Solución

Calculemos $\frac{da}{d\alpha}$. Comencemos por aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}} \cdot \frac{d}{d\alpha}(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha).$$

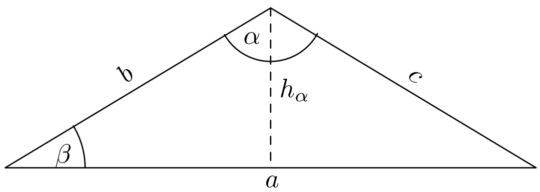
Directamente, observemos que

$$\frac{d}{d\alpha}(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha) = 2bc\operatorname{sen}\alpha.$$

Así, tenemos que

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}} = \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{a}.$$

Dibujemos la situación:



Notemos que, por Teorema del Seno se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{c} \iff \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{a} = \operatorname{sen}\beta$$

pero además

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h_\alpha}{b} \implies \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{a} = h_\alpha.$$

En conclusión

$$\frac{da}{d\alpha} = h_\alpha.$$

P3. Derivar las siguientes funciones:

(a) $y = \operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right) + \cos\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right)$

(b) $y = \sqrt[n]{\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}}$

(c) $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)$

Solución

(a) Por Álgebra de Derivadas, podemos calcular cada derivada por separado y luego sumarlas. Entonces:

- Notemos que podemos reescribir la expresión como sigue

$$\operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right) = \operatorname{sen}\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)$$

y por regla de la cadena tenemos que

$$\left(\operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right)\right)' = \left(\operatorname{sen}\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)\right)' = \cos\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)\cdot\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)'$$

y por regla de la cadena nuevamente

$$\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)' = e^{\cos(x)\ln(x)}\cdot(\cos(x)\ln(x))'.$$

Aplicando la regla del producto tenemos

$$(\cos(x)\ln(x))' = -\operatorname{sen}(x)\ln(x) + \cos(x)\cdot\frac{1}{x},$$

y juntando todo lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right)\right)' &= \cos\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)\cdot e^{\cos(x)\ln(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\frac{1}{x}-\operatorname{sen}(x)\ln(x)\right)\\ &= \cos\left(x^{\cos(x)}\right)\cdot x^{\cos(x)}\cdot\left(\frac{\cos(x)}{x}-\operatorname{sen}(x)\ln(x)\right).\end{aligned}$$

- Análogamente

$$\left(\cos\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right)\right)' = -\operatorname{sen}\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right)\cdot x^{\operatorname{sen}(x)}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}+\cos(x)\ln(x)\right).$$

Luego, la derivada original se concluye sumando ambos resultados.

(b) Resolvamos esta derivada utilizando el operador logarítmico $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}\left[\sqrt[n]{\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}}\right]\\ &= \frac{1}{n}\mathcal{L}\left[\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}\right]\\ &= \frac{1}{n}\left(\mathcal{L}[x-\operatorname{tg}(x)]-\mathcal{L}[x+\sec(x)]\right).\end{aligned}$$

Y recordando que $\mathcal{L}[f] = \frac{f'}{f}$:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{n}\left(\frac{1-\sec^2(x)}{x-tg(x)}-\frac{1+\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}\right).$$

Luego, $y' = y\,\mathcal{L}[y]$.

(c) Por regla de la cadena

$$\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)^2}}\cdot\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)'.$$

Aplicando la regla del cuociente a la última expresion:

$$\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)' = \frac{3\cos(x)(4+5\cos(x))+15\operatorname{sen}^2(x)}{(4+5\cos(x))^2} = \frac{15+12\cos(x)}{(4+5\cos(x))^2}.$$

En conclusión, la derivada es

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)^2}}\cdot\frac{15+12\cos(x)}{(4+5\cos(x))^2}.$$

P4. Considere la función dada por la regla

$$f(x) = \begin{cases} x^n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

(a) Pruebe que si $n\geq 1$ se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

(b) Pruebe que si $n>1$ entonces f es derivable en $x_0=0$, pero para $n=1$ no.

(c) Calcule $f'(x)$ para $x\neq 0$ y encuentre para qué valores de n se cumple $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Solución

(a) Calculemos directamente el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u^{n-1}}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 0,$$

donde la última igualdad se justifica por el límite conocido $\lim_{u\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 0$, y dado que $n \geq 1$, $\frac{1}{u^{n-1}}$ converge (a 1 para $n = 1$, y a cero para los demás casos).
Con esto, el Álgebra de Límites, y el hecho de que $f(0) = 0$, nos permiten concluir, y queda demostrado lo pedido.

(b) Calculemos la derivada en $x_0 = 0$ por definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Notemos que si $n = 1$, entonces tendremos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

que sabemos no existe.
Si $n > 1$ tendremos el caso conocido de nula por acotada, y entonces $f'(0) = 0$ (en particular, f es derivable en 0).

(c) Supongamos que $x \neq 0$ y $n > 1$, entonces por regla del producto tendremos que

$$f'(x) = \left(x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = nx^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^n\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'.$$

Para calcular la derivada que queda, usamos la regla de la cadena:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

En conclusión:

$$f'(x) = nx^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Por argumentos análogos a la parte anterior, el límite en 0 existirá ssi $n > 2$.

P5. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2\operatorname{arcsen}(yx)} = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$$

en el punto P donde la curva corta el eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).
Solución
En primer lugar, determinemos el punto P. Del enunciado ya sabemos que será de la forma $(x_0, 0)$. Podemos hayar x_0 imponiendo la condición $y = 0$ en la ecuación y despejando para x, es decir:

$$1 = \ln(1 + x_0^2) \iff 1 + x_0^2 = e \iff x_0 = \sqrt{e-1}.$$

Luego, P es $(\sqrt{e-1}, 0)$.

Para obtener la pendiente de la recta, en primera instancia deberíamos disponer de una ecuación explícita para $y(x)$. Como esto a priori no es posible, derivemos implicitamente a ambos lados.

- Lado izquierdo: Comencemos usando la regla de la cadena

$$\left(e^{2\operatorname{arcsen}(yx)}\right)' = e^{2\operatorname{arcsen}(yx)}\cdot(2\operatorname{arcsen}(yx))'.$$

Recordando que $(\operatorname{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y usando regla de la cadena nuevamente tenemos que

$$(2\operatorname{arcsen}(yx))' = \frac{2}{\sqrt{1-(yx)^2}}\cdot(yx)'$$

y por regla del producto tenemos que

$$(yx)' = y'x + y.$$

En resumen:

$$\left(e^{2\,\mathrm{arcsen}(yx)}\right)' = \frac{2e^{2\,\mathrm{arcsen}(yx)}}{\sqrt{1-y^2x^2}}(y'x+y).$$

- Lado Derecho: Usando la regla de la cadena

$$\left(\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2+y^2}\cdot\left(1+x^2+y^2\right)'$$

y por álgebra de derivadas

$$(1+x^2+y^2)' = 0 + 2x + \left(y^2\right)'.$$

Nuevamente por regla de la cadena

$$\left(y^2\right)' = 2yy'$$

y en resumidas cuentas:

$$\left(\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right)' = \frac{2x+2yy'}{1+x^2+y^2}.$$

Luego, juntando todo lo anterior

$$\frac{2e^{2\,\mathrm{arcsen}(yx)}}{\sqrt{1-y^2x^2}}(y'x+y) = \frac{2x+2yy'}{1+x^2+y^2}.$$

Como necesitamos y' cuando $y=0$, reemplazamos la condición para obtener que

$$2y'x = \frac{2x}{1+x^2}$$

puesto que $\mathrm{arcsen}(0) = 0$ y $e^0 = 1$.
Concluimos que

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

La ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

En nuestro caso, tenemos que $y_0 = 0$ y que $x_0 = \sqrt{e-1}$. Así, la recta tangente por el punto P a la curva es

$$\mathcal{L}:\ y = \frac{1}{e}\left(x - \sqrt{e-1}\right).$$

P6. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right) = \mathrm{sen}(yx)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas $(y=0)$, con abscisa positiva $(x>0)$.

Solución

En primer lugar, calculemos el valor de x en el punto que nos impone el problema. Para esto, reemplacemos $y=0$, y notemos que

$$\ln\left(\frac{3}{4}+x^2+0\right) = \mathrm{sen}(0) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4}+x^2\right) = 0.$$

Luego, aplicando la función exponencial a la igualdad, tenemos

$$\frac{3}{4}+x^2 = e^0 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Donde nos hemos quedado con la respuesta positiva, dadas las condiciones del problema. Ahora, para calcular la recta tangente, necesitamos y', por lo que procederemos tal como se hizo en **P5**, partiendo por derivar implícitamente ambos lados de la ecuación. Siendo así, comenzando por el lado izquierdo, tenemos que

$$\left(\ln\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)\right)' = \frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)' = \frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot(2x+y')\,.$$

Ahora, derivando el lado derecho, tenemos

$$(\operatorname{sen}(yx))' = \cos(yx)\cdot(yx)' = \cos(yx)\cdot(y'x+y).$$

En este punto, reuniendo lo obtenido hasta ahora

$$\frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot(2x+y') = \cos(yx)\cdot(y'x+y).$$

Aquí, imponemos los valores de x e y encontrados recientemente ($x=\frac{1}{2}$ e $y=0$) y despejamos y':

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0}\cdot(1+y') = \cos(0)\cdot\left(y'\frac{1}{2}+0\right) &\iff \frac{1}{1}\cdot(1+y') = 1\cdot\left(\frac{y'}{2}\right)\\ &\iff 1+y' = \frac{y'}{2}\\ &\iff y'=-2\end{aligned}$$

Y tal como se hizo anteriormente, se concluye que la recta buscada es:

$$\mathcal{L}:\ y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

P7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)-f(y)|\leq a(x-y)^2$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ con $a>0$. Pruebe que $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ existe y $f'(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$.
Solución
Sea $x_0\in\mathbb{R}$. Notemos que escogiendo $x=x_0+h$ e $y=x_0$ tenemos que $|f(x_0+h)-f(x_0)|\leq ah^2$, es decir

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{h}\leq ah.$$

Tomando $h\to 0$, por Teorema del Sandwich concluimos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{|h|} = 0 = |f'(x_0)|$$

de donde se concluye el resultado.

P8. Determine un punto en que la curva $x^2+y^2=e^{2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, k constante, corta al semieje positivo OX y escriba las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto.
Solución
Un punto $P(x,y)$ sobre la curva que cumpla las condiciones antes descritas deberá necesariamente tener $y=0$, es decir, será una solución de la ecuación $x^2=1$, y como buscamos una solución positiva, el punto que cumple esto es $(1,0)$. Teniendo esto, buscamos la recta tangente por el punto $(1,0)$. Para encontrar la pendiente, derivemos implicitamente la ecuación de la curva:

- Lado Izquierdo: Directo.
$$\left(x^2+y^2\right)' = 2x+2yy'.$$
- Lado Derecho: Usemos la regla de la cadena
$$\left(e^{2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right)' = e^{2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\left(2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'.$$

Para esta derivada notemos que $2k$ es una constante y luego

$$\left(2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = 2k \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = 2k \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Para la derivada restante, por regla del cuociente tenemos

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

y en conclusión

$$\left(e^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}\right)' = \frac{2ke^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2ke^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{x^2+y^2} \cdot (y'x - y).$$

En resumen, la derivación implicita resulta en

$$2x + 2yy' = \frac{2ke^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{x^2+y^2} \cdot (y'x - y)$$

e imponiendo las condiciones antes encontradas

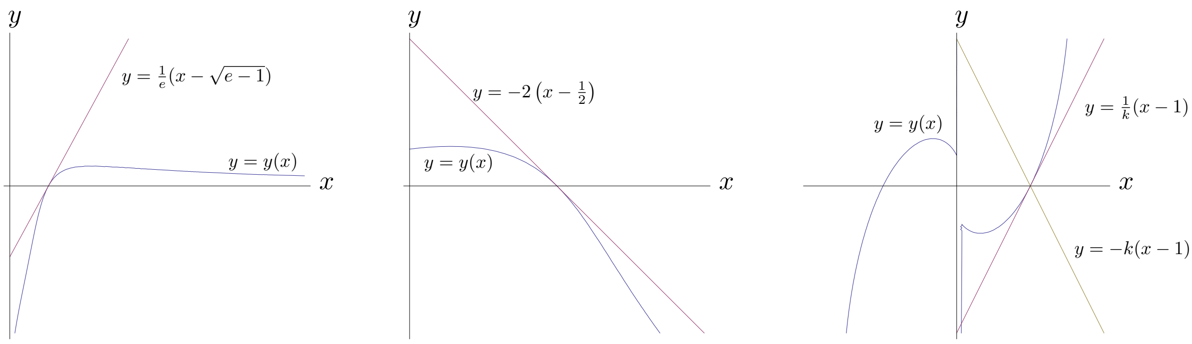
$$2 = 2k \cdot y' \iff y' = \frac{1}{k}.$$

Luego, la recta tangente a la curva por este punto es de ecuación

$$\mathcal{L}: \ y = \frac{1}{k}(x-1).$$

Y similarmente, la recta normal a la curva por este punto es

$$\mathcal{N}: \ y = -k(x-1).$$



(a) P5 (b) P6 (c) P8

: Graficos de las Rectas Tangentes :

P9. Considere las funciones siguientes definidas para todo $x > 0$: $f(x) = \sqrt{\frac{2+x^3}{2+x}}$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$, $h(x) = 4c \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) - c \operatorname{sen}(cx) + d$. Encuentre los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que f y g tienen la misma recta tangente en $x = 1$ y además que las rectas tangentes a f y h son perpendiculares en $x = 0$.
Nota. Dado que h no está definido en $x = 0$, considere su límite cuando x tiende a 0^+.

Solución
Tal como se ha hecho en problemas anteriores, necesitamos obtener las derivadas de cada función,

para así poder calcular sus respectivas rectas tangentes en los puntos que corresponda. Siendo así, comencemos por calcular las derivadas de todas las funciones propuestas.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2+x^3}{2+x}}} \cdot \left(\frac{2+x^3}{2+x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2+x^3}} \left(\frac{3x^2(2+x) - (2+x^3)}{(2+x)^2}\right)$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + a$$

$$h'(x) = \frac{4c}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - c\cos(cx) \cdot (cx)' = \frac{-4c}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) - c^2\cos(cx) = \frac{-4c}{x^2+1} - c^2\cos(cx)$$

Ahora, impongamos las condiciones del enunciado. En primer lugar, nos dicen que las funciones f y g poseen la misma recta tangente en $x = 1$, luego, para que esta situación se tenga, tanto las funciones como sus derivadas deben ser iguales en este punto. Así, tenemos:

$$f(1) = g(1) \iff 1 = a + b - 2 \iff a + b = 3,$$

$$f'(1) = g'(1) \iff \frac{1}{3} = a - 3.$$

De donde despejando, se obtiene que $a = \frac{10}{3}$ y $b = -\frac{1}{3}$.

Para la segunda condición del problema, primero sigamos la indicación del problema, calculando el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} 4c\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - c\,\mathrm{sen}(cx) + d = \lim_{u\to+\infty} 4c\,\mathrm{arctg}(u) - c\,\mathrm{sen}\left(\frac{c}{u}\right) + d = 4c\frac{\pi}{2} + d = 2\pi c + d,$$

donde se aplicó un resultado conocido para $\mathrm{sen}(x)$, y uno probado en los problemas de la Semana 13 para $\mathrm{arctg}(x)$.

Ahora, nuevamente debemos imponer que las funciones sean iguales en el punto indicado, pero ahora la condición para las derivadas es $f'(0) \cdot h'(0) = -1$. Siendo así, tenemos:

$$f(0) = h(0) \iff 1 = 2\pi c + d,$$

$$f'(0) \cdot h'(0) = -1 \iff -\frac{1}{4} \cdot (-4c - c^2) = -1.$$

Y despejando tal como antes, se obtienen los valores $c = -2$, y $d = 4\pi + 1$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
10 de Julio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 15

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(x)} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que la función f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x} - \cos(x)\ln(1+x)}{(\operatorname{sen}(x))^2} & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

y encontrar el polinomio de Taylor de orden 2.

Solución:
Comencemos calculando la derivada de f para $x \neq 0$. Por la regla del cuociente, tenemos

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' = \frac{(\ln(1+x))' \operatorname{sen}(x) - \ln(1+x)(\operatorname{sen}(x))'}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x} - \ln(1+x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)},$$

que es justo lo que se nos pedía obtener en esta rama.
Ahora, para el caso $x = 0$, debemos calcularla por definición. Siendo así, tenemos

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{\operatorname{sen}(h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \operatorname{sen}(h)}{h\operatorname{sen}(h)}.$$

Dado que hemos llegado a una expresión del tipo $\frac{0}{0}$, usemos la regla de L'Hôpital. Entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \operatorname{sen}(h)}{h\operatorname{sen}(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{(\ln(1+h) - \operatorname{sen}(h))'}{(h\operatorname{sen}(h))'} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - \cos(h)}{\operatorname{sen}(h) + h\cos(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h) - h\cos(h)}{(1+h)(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h))}.$$

Y tras una nueva inspección, notamos que seguimos teniendo una expresión del estilo ya mencionado; por lo que nuevamente podríamos aplicar L'Hôpital. De esta manera:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h) - h\cos(h)}{(1+h)(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h))} &= \lim_{h\to 0} \frac{[1 - \cos(h) - h\cos(h)]'}{[(1+h)(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h))]'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h) - \cos(h) + h\operatorname{sen}(h)}{1\cdot(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h)) + (1+h)(\cos(h) + \cos(h) - h\operatorname{sen}(h))} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad, se da al evaluar los límites conocidos que resultaron.

Para encontrar el polinomio de Taylor de segundo orden, necesitamos además $f''(0)$, cuyo valor se encuentra en forma análoga a como se encontró $f'(0)$, y se deja como ejercicio para el lector. Sea como sea que se resuelva, obtendremos $f''(0) = 1$. Así, el polinomio pedido es

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)(x-0)}{1!} + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

P2. Sea $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Demostrar que $f' = xf$ y que para $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x_0) = x_0 f^{(n-1)}(x_0) + (n-1)f^{(n-2)}(x_0)$$

Use esta fórmula para encontrar el polinomio de Taylor en torno a 1 de orden 4 y el polinomio de Taylor de f en torno a 0 de orden n, cualquiera.

Solución:
Calculemos f':

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = xf(x).$$

Entonces, si $n > 1$, por la Fórmula de Leibnitz:

$$f^{(n)}(x) = (xf(x))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)} f^{(n-1-k)}(x).$$

Notemos que para la función x se tiene que $x^{(0)} = x$ (definición), $x^{(1)} = x' = 1$ y luego $x^{(k)} = 0,\ \forall k \geq 2$. Utilizando esta información en la expresión anterior observamos que de la sumatoría sólo quedarán los términos con $k = 0$ y $k = 1$, pues para los demás $x^{(k)} = 0$. Así

$$f^{(n)}(x) = \binom{n-1}{0} x f^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)$$

y evaluando en x_0 se obtiene el resultado.

Con esto, calculemos las cinco primeras derivadas (incluida la de orden 0 que es la función) evaluadas en 1:

- $f^{(0)}(1) = f(1) = \sqrt{e}$
- $f^{(1)}(1) = f'(1) = 1 \cdot f(1) = \sqrt{e}$
- $f^{(2)}(1) = 1 \cdot f'(1) + 1 \cdot f(1) = 2f(1) = 2\sqrt{e}$
- $f^{(3)}(1) = 1 \cdot f^{(2)}(1) + 2 \cdot f'(1) = 2\sqrt{e} + 2\sqrt{e} = 4\sqrt{e}$
- $f^{(4)}(1) = 1 \cdot f^{(3)}(1) + 3 \cdot f^{(2)}(1) = 4\sqrt{e} + 6\sqrt{e} = 10\sqrt{e}$

Y así, el polinomio de Taylor de orden 4 en torno a 1 es:

$$T_4(x) = \sqrt{e} + \sqrt{e}(x-1) + \sqrt{e}(x-1)^2 + \frac{2\sqrt{e}}{3}(x-1)^3 + \frac{10\sqrt{e}}{24}(x-1)^4.$$

Para calcular la expansión de Taylor en torno a 0, notemos que de la fórmula obtenida con anterioridad tenemos que

$$f^{(n)}(0) = (n-1)f^{(n-2)}(0).$$

Entonces, podemos notar que $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, $f'(0) = 0 \cdot f(0) = 0$, $f''(0) = 1 \cdot f(0) = 1$, $f'''(0) = 2 \cdot f'(0) = 0$, y por inducción se puede verificar que

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (k-1) & ,\ k \text{ par} \\ 0 & ,\ k \text{ impar} \end{cases}.$$

Luego, el polinomio de Taylor pedido será, dependiendo de la paridad o imparidad de n:

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{4!} + \ldots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (n-1) x^n}{n!} & ,\ n \text{ par} \\ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{4!} + \ldots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (n-2) x^{n-1}}{(n-1)!} & ,\ n \text{ impar} \end{cases}.$$

Esto es así, ya que en el caso de n impar, ya vimos que $f^{(n)}(0) = 0$, por lo que el último término de la sumatoria no aparecerá.

P3. Demuestre que si f alcanza un máximo en x_0 y es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$. Use este hecho para encontrar el máximo de la función $\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$.

Solución:
Mostremos en primer lugar el siguiente resultado:

Si x_0 es máximo de f, entonces

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad f(x_0 - \varepsilon) \leq f(x_0) \wedge f(x_0 + \varepsilon) \leq f(x_0)$$

Demostración: Por contradicción, supongamos que

$$(\exists \bar{\varepsilon} > 0) \quad f(x_0 - \bar{\varepsilon}) > f(x_0) \vee f(x_0 + \bar{\varepsilon}) > f(x_0).$$

Es directo que esto es una contradicción con el hecho que x_0 es máximo de f. Luego, se tiene la propiedad.$\blacksquare$

Una vez dicho esto, notemos que como f es derivable en x_0 en particular los limites laterales en la definición de derivada existen y además

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Esto último se tiene por la propiedad recién demostrada, y como ambos limites son iguales se tiene que

$$f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) = 0.\blacksquare$$

Ahora, calculemos $f'(x)$ para la función que se propone en el enunciado, utilizando el operador logarítmico $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[\ln(1+x^2)] - \mathcal{L}[1+x^2] \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \frac{2x}{(1+x^2)} \\ &= \frac{2x(1 - \ln(1+x^2))}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}.\end{aligned}$$

Y por ende

$$f'(x) = f(x)\,\mathcal{L}[f(x)] = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \cdot \frac{2x(1-\ln(1+x^2))}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} = \frac{2x(1-\ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2}$$

Ahora, debemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$, para $x \in \operatorname{Dom} f$. Entonces

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{2x(1-\ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2x(1-\ln(1+x^2)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \vee \ln(1+x^2) = 1 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{e-1}.\end{aligned}$$

Observemos que dado que f es par, si encontramos un máximo en x_0 entonces $-x_0$ también será un máximo. Por este motivo, nos basta analizar las soluciones positivas.

Como obtuvimos 3 soluciones, debemos evaluar en cada una para ver cual(es) efectivamente es(son) máximo(s) de la función.

- $f(0) = 0$.
- $f(\sqrt{e-1}) = \frac{1}{e}$

Por lo tanto, f tiene máximos en $\pm\sqrt{e-1}$ y valen $\frac{1}{e}$.

P4. Demuestre que si $f''(x_0)$ existe entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

Use esta expresión para probar que si f tiene un mínimo en x_0 entonces $f''(x_0) \geq 0$. Con ayuda de esto último, determine si 0 es un mínimo de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Solución:
Para la primera parte, notemos que en el límite propuesto, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, cuando $h \to 0$. Luego, es válido aplicar la regla de L'Hôpital, y tendremos lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}.$$

Esto último, recordando que la regla se aplica sobre la variable del límite (en este caso, h), y sabiendo que x_0 es una constante. Luego, notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)-f'(x_0)+f'(x_0)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h} + \frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}.\end{aligned}$$

Por último, notando que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h} = \frac{f''(x_0)}{2},$$

se concluye que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{f''(x_0)}{2} = f''(x_0).$$

Probemos ahora la segunda parte del problema.

Notar que si x_0 es un mínimo de la función f, se tiene que

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$

Luego, en particular tenemos que

$$f(x_0+h) \geq f(x_0) \quad \wedge \quad f(x_0-h) \geq f(x_0).$$

Si sumamos ambas expresiones, se tendrá que

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) \geq 0.$$

En este punto, dividiendo a ambos lados por h^2, y luego tomando el límite cuando $h \to 0$, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \geq 0 \iff f''(x_0) \geq 0. \blacksquare$$

Terminemos el problema, probando si $x_0 = 0$ es efectivamente un mínimo de la función presentada. Utilizando la primera parte, calcularemos $f''(0)$ como sigue

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} + \frac{\operatorname{sen}(-h)}{-h} - 2}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(h)-2h}{h^3}. \end{aligned}$$

Vemos que el numerador y el denominador tienden a cero en esta situación, por lo que podremos aplicar la regla de L'Hôpital. Tras hacer esto, seguiremos en la misma situación, por lo la regla será aplicada dos veces en total. Así:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(h) - 2h}{h^3} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(h) - 2}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}(h)}{6h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{2}{6} \cdot \frac{\mathrm{sen}(h)}{h} \\
&= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \leq 0.
\end{aligned}$$

De lo que concluimos que $x_0 = 0$ no es mínimo de f.■

P5. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función $(1+x)^n$ de orden n en torno a 0. Interprete su resultado en términos del teorema del Binomio.

Solución:
Necesitamos saber el valor de $f^{(k)}(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Para esto, calculemos algunas:

- $f^{(0)}(0) = 1 = \frac{n!}{n!}$
- $f^{(1)}(0) = n = \frac{n!}{(n-1)!}$
- $f^{(2)}(0) = n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$

Razonando por inducción, se puede mostrar que $f^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

En conclusión, el polinomio de Taylor de orden n en torno a 0 de la función $f(x) = (1+x)^n$ está dado por

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

que es justamente, la expresión que da el Teorema del Binomio de Newton para $(1+x)^n$.