Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-Introducción al Cálculo

Auxiliar 11: Función Exponencial y Logarítmica

5 de junio de 2019

Profesores: Jorge San Martín
Auxiliar: Álvaro Becerra
Email: `alvaro.becerra@ug.uchile.cl`

P1. *a)* Sea h_n una sucesión tal que $nh_n \to l \in \mathbb{R}$. Pruebe que $h_n \to 0$ y que:

$$\lim(1+h_n)^n = e^l$$

b) Sea h_n una sucesión nula y $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

$$\lim(1+xh_n)^{\frac{1}{h_n}} = e^x$$

c) Sean s_n y b_n dos sucesiones tales que $s_n \to s > 0$ y $b_n \to b \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

$$\lim(s_n^{b_n}) = s^b$$

P2. Calcule en caso de existir los siguientes límites:

a) $\lim n(n^2(\exp(\frac{1}{n^2})-1)-1)$

b) $\lim(\frac{\ln(n)}{n})$

c) $\lim \frac{(\ln(n))^2}{n}$

d) $\lim \frac{1}{n}\ln(1+e^{an})$ con $a>0$

e) $\lim \frac{1}{n}\ln(3+2e^n)$

f) $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})$

g) $\lim \frac{\sqrt[n]{e}-1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$

h) $\lim(\cos(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{n})}}$

P3. Para $n \geq 1$ se definen:

$$x_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right), \quad y_n = x_n - \frac{1}{n}$$

i) Demuestre que la sucesión x_n es decreciente y que la sucesión y_n es creciente.

ii) Deduzca que ambas sucesiones convergen y que lo hacen al mismo límite l tal que: $0 \leq l \leq 1$.

iii) Deduzca que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n)} = 1$$

iv) Justifique que:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}+\cdots+\tfrac{1}{2n}\right\} = \ln(2)$$

P4. El objetivo de esta pregunta es calcular $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Para ello:

a) Pruebe que $\forall n \geq 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Para esto pruebe que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente.

b) A partir de los anterior, pruebe que: $\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

c) Calcule $\lim \frac{(n+1)}{\sqrt[n]{n!}}$ a partir de este resultado, concluya.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Resumen

1. Límite exponencial

Teorema 1.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ la sucesión:*

$$s_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

converge.

Definición 1.1. *Se define la función exponencial como:*

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Propiedad 1.1. *La función exponencial posee las siguientes propiedades:*

1. $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$.
3. $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
4. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
5. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
6. $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$
7. $\forall x,\, y \in \mathbb{R} \quad x < y \implies \exp(x) < \exp(y)$
8. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \exp(px) = (\exp(x))^p$
9. $\lim \exp(-n) = \lim \frac{1}{e^n} = 0$
10. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \exp(\frac{x}{q}) = \sqrt[q]{\exp(x)}$.
11. $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \sqrt[n]{e} = 1$.

Propiedad 1.2. *La función $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ es sobreyectiva*

2. Función Logaritmo Natural

Definición 2.1. *La función logaritmo natural o de Neper corresponde a la función inversa de $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0,\infty)$:*

$$\begin{aligned} \ln : (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) = \exp^{-1}(x) \end{aligned}$$

Propiedad 2.1. *La función $\ln(x)$ presente las siguientes propiedades:*

1. $\forall x,\, y \in (0,\infty) \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y))$
2. $\forall x,\, y \in (0,\infty) \quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y))$

Propiedad 2.2 (Desigualdad Fundamental)**.** *Para todo $x \in (0,\infty))$:*

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

3. Límites Importantes

Sea $a_n \to a$

1. $\exp(a_n) \to \exp(a)$-
2. $\frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \to e^a$.
3. $\ln(a_n) \to \ln(a)$.
4. $\frac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \to \frac{1}{a}$
5. $\sin(a_n) \to \sin(a)$.
6. $\cos(a_n) \to \cos(a)$