

PAUTA AUX #8

a) $A \neq \emptyset ; B \neq \emptyset \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$a \leq b \quad \forall a, \forall b \in A \text{ y } B \text{ respectivamente}$$

$$\text{Además } \exists \varepsilon > 0, \exists a \in A \wedge b \in B \text{ t.q. } b - a < \varepsilon$$

$$\text{Dq } \exists \inf(B), \exists \sup(A) \text{ y } \sup(A) = \inf(B)$$

Por un lado:

$$A \neq \emptyset \wedge \forall a \in A \quad \exists b_0 \in B$$

$$\text{t.q. } a \leq b_0 \rightarrow \text{Posee cota superior}$$

Ax. Supremo

$\Rightarrow A$ posee supremo.

Por otro lado.

$$B \neq \emptyset \quad \exists a_0 \in A \text{ t.q. } \forall b \in B \quad a_0 \leq b.$$

$\Rightarrow B$ es acotado inferiormente

por Ax. del Supremo $\Rightarrow B$ posee infimo.

Como b es cota superior de A (todo $b \in B$ es cota sup de A).

Entonces por DEFINICIÓN DE SUPREMO

$$\rightarrow \sup(A) \leq b$$

¿ Por qué se puede afirmar esta desigualdad?

La desigualdad nos dice que $\sup(A)$ es cota interior de B .

$$\rightarrow a \leq \sup(A) \leq \inf(B) \leq b.$$

Misma justificación

$$\forall a \in A, b \in B$$

De

$$a \leq \sup(A) \leq \inf(B) \leq b.$$

se tiene

Valor más bajo
↓ para $\sup(A)$.

$$\inf(B) - \sup(A) \leq b - a$$

↑
Valor más alto
para $\inf(B)$

Del enunciado se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a, b \in A, B \text{ tal que } b - a < \varepsilon$$

$$\text{pero } \inf(B) - \sup(A) \leq b - a$$

Puede surgir
duda por esto.

$$\Rightarrow \inf(B) - \sup(A) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$
$$\Rightarrow \inf(B) = \sup(A)$$

Anterior mente se demostró que $\sup(A) \leq \inf(B)$

$$\rightarrow \inf(B) - \sup(A) \geq 0.$$

La única forma que $\inf(B) - \sup(A) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$
con Epsilon tomando valores en $\mathbb{R}$ positivo
es que $\inf(B) - \sup(A) = 0.$

$$b) \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \leq 0 \right\}$$

Para este ejercicio basta analizar el conjunto sol. de la inecuación:

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \leq 0$$

Sus puntos críticos son $\{1, 2, 3\}$

$$(-\infty, 1) \rightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \leq 0$$

$$(1, 2) \rightarrow \quad \quad \quad \geq 0 \quad \rightarrow \text{No es sol.}$$

$$(2, 3) \rightarrow \quad \quad \quad \leq 0$$

$$(3, \infty) \rightarrow \quad \quad \quad \geq 0$$

Indetermina
denominador

$$\therefore M = (-\infty, 1] \cup (2, 3]$$

M no tiene cota inferior $\Rightarrow M$ no tiene ínfimo ni mínimo

M posee cota sup y $\max(M) = \sup(M) = 3$

↑
Pertenece al conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ acotado sup. mente

sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y

$$B = \{y \in \mathbb{R}; y = x + a \quad x \in A\}$$

Dq B tiene sup. y $\sup(B) = \sup(A) + a$

i) $A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \sup(A)$

ii) A acotado superiormente

$$\forall x \in A \quad x \leq \sup(A)$$

De aquí se tiene que

$$x + a \leq \sup(A) + a$$

$$\text{pero } y = x + a \Rightarrow y \leq \sup(A) + a$$

↑ Cota superior de B

Como $B \neq \emptyset$

$\Rightarrow B$ posee supremo

$$y \leq \sup(B) \leq \sup(A) + a \quad (1)$$

Ahora desde la perspectiva inversa

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x = y - a \quad y \in B\}$$

$$y - a \leq \sup(B) - a \quad \leftarrow \text{Cota superior}$$

A tiene supremo entonces

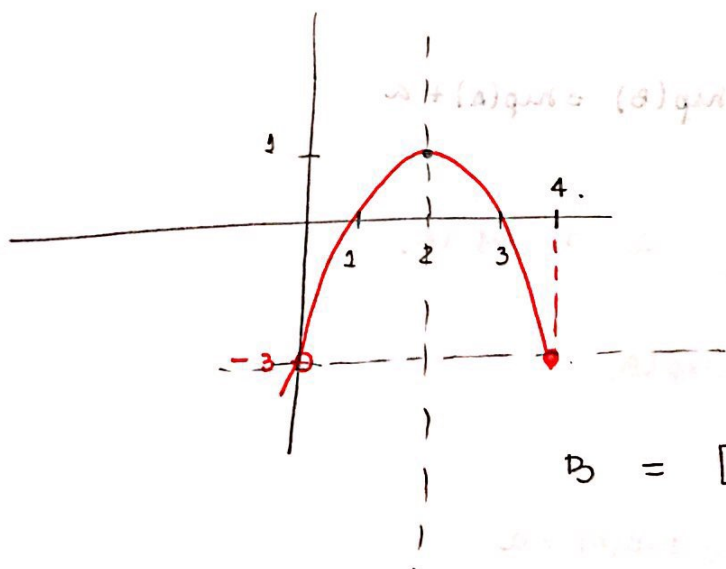
$$\sup(A) \leq \sup(B) - a \quad (2)$$

Se tiene (1) y (2) $\sup(B) \leq \sup(A) + a$ $\Rightarrow \sup(B) = \sup(A) + a$ $\parallel$
 $\sup(B) \geq \sup(A) + a$

b) Det. Máx, sup. Inf.

$$B = \{-x^2 + 4x - 3 \mid 0 \leq x \leq 4\} \quad V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c \right)$$

Parábola de vértice
 $x = 2 \quad y = 1.$



$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2}$$

$$x = 2 \pm 1 = \{3, 1\}.$$

$$\inf(B) = \min(B) = -3$$

$$\max(B) = \sup(B) = 1$$

$$B = [-3, 1]$$

a) Como a es cota superior e inferior de C

$$\forall x \in C$$

$$a \leq x \leq a \Rightarrow C = \{a\}$$

b) $A \cup B \neq \emptyset$ $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $A \subseteq B$.

i) $B \neq \emptyset$

ii) B acotado superiormente $\Rightarrow$ Tiene supremo.

$$\forall b \in B \quad b \leq \sup(B)$$

Como $A \subseteq B$.

Si $a \in A$ entonces $a \in B$.

Cota superior

$$\text{Como } a \in B \quad a \leq \sup(B)$$

Como $A \neq \emptyset$ Entonces tiene supremo.

$$a \leq \sup(A)$$

$$\Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B) \quad \text{¿ Por qué?}$$

Ejemplo Importante
de como demostrar

infimo

c) Sea $D = \left\{ \frac{n+1}{n} ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

$$\text{Se tiene } D \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

$\Rightarrow 1$ es cota inf de $D \Rightarrow$ tiene infimo

Dq $\inf(D) = 1$. (Por contradicción demostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $1 + \varepsilon$ no es cota inf de D).

$$\text{Si } 1 + \varepsilon \text{ es cota inf de } D \Rightarrow 1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\varepsilon < 1 \quad \text{Por prop. arquimediiana}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } nx > 1$$

$$\therefore 1 + \varepsilon \text{ no es cota inf} \Rightarrow \inf(D) = 1 //$$