

## Pauta Auxiliar 7: Funciones Trigonométricas Inversas

1 de mayo de 2019

**Profesores:** Jorge San Martín

**Auxiliar:** Álvaro Becerra

**Email:** alvaro.becerra@ug.uchile.cl

### Resumen

#### F. Trogonométricas Inversas

**Definición 0.1.** Se llama *arcoseno* a la función inversa de  $f(x) = \sin(x)$ , es decir:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x$$

**Definición 0.2.** Se llama *arcocoseno* a la función inversa de  $f(x) = \cos(x)$ , es decir:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$y = \arccos x \iff \cos y = x$$

**Definición 0.3.** Se llama *arcotangente* a la función inversa de  $f(x) = \tan(x)$ , es decir:

$$\arctan : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$y = \arctan x \iff \tan y = x$$

#### Ecuaciones Trigonométricas

1.  $\sin x = a$  con  $a \in \mathbb{R}$

a) Si  $|a| > 1$ , no existe solución.

b) Si  $|a| \leq 1$ , entonces:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin(a) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

2.  $\cos x = a$  con  $a \in \mathbb{R}$

a) Si  $|a| > 1$ , no existe solución.

b) Si  $|a| \leq 1$ , entonces:

$$x = 2k\pi \pm \arccos(a) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

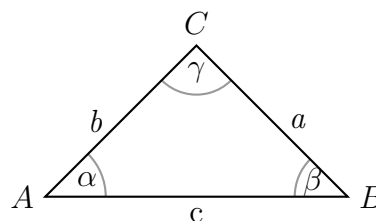
3.  $\tan x = a$  con  $a \in \mathbb{R}$

a) Si  $|a| > 1$ , no existe solución.

b) Si  $|a| \leq 1$ , entonces:

$$x = k\pi + \arctan(a) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

#### Teo. del Seno y del Coseno



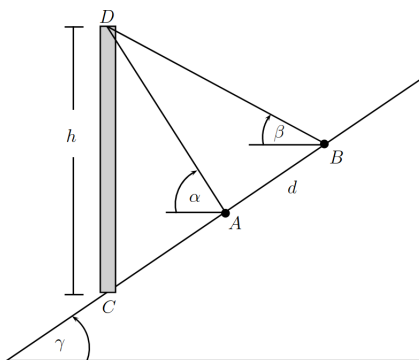
Para el triángulo de la figura se cumple que:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (\text{T. Seno})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad (\text{T. Coseno})$$

**P1.** Para conocer la altura  $h$  de una torre vertical ubicada en la ladera de un cerro, se ubican dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la ladera, distantes una magnitud  $d$  entre si y colineales con la base  $C$  de la torre (ver figura). Los ángulo de elevación desde  $A$  y  $B$  a la cúspide  $D$  de la torre son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente y el ángulo de inclinación de la ladera es  $\gamma$ . Demuestre que la altura  $\overline{CD} = h$  de la torre en función de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $d$  es:

$$h = d \cdot \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \sec(\gamma) \csc(\alpha - \beta)$$



Llamando  $s_1$  al segmento  $\overline{DB}$ ,  $s_2$  al segmento  $\overline{DA}$  y  $s_3$  al segmento  $\overline{CA}$ . Se tiene aplicando reiteradamente el teorema del seno:

$$\begin{aligned} \frac{h}{\sin(\alpha + \gamma)} &= \frac{s_3}{\cos(\alpha)} \\ \frac{s_3}{\cos(\alpha)} &= \frac{s_2}{\cos(\gamma)} \\ \frac{s_2}{\sin(\beta + \gamma)} &= \frac{s_1}{\sin(\alpha + \gamma)} \\ \frac{s_1}{\sin(\alpha + \gamma)} &= \frac{d}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Realizando todos los reemplazos en las igualdades se obtiene:

$$h = d \cdot \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \sec(\gamma) \csc(\alpha - \beta)$$

**P2.** Resuelva la siguientes ecuaciones y discuta, cuando corresponda los casos en que no existe solución:

i)  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin(2x)$

Esta ecuación es ilustrativa del caso cuando no existen soluciones a una ecuación trigonométrica, desarrollando  $\tan x$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 1 + \sin(2x) \\
 &\cos x - \sin x = \cos x + \sin x + \sin(2x) \cos x + \sin(2x) \sin x \\
 &0 = 2 \sin x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin(2x) \sin x \\
 &0 = \sin x \cdot (2 + 2 \cos^2 x + \sin(2x)) \\
 &\Rightarrow \sin x = 0 \vee 2 + 2 \cos x + \sin(2x) = 0 \\
 &\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\quad \vee \\
 &2 + 2 \cos x + \sin(2x) \geq 1 \Rightarrow \text{No existe solución aquí}
 \end{aligned}$$

ii)  $\sin 2x = \cos \frac{x}{2}$

En este ejercicio la idea utilizar *las fórmulas del prostaferénesis*, para obtener todas las soluciones.

$$\begin{aligned}
 &\sin 2x = \cos \frac{x}{2} \\
 &\sin 2x - \cos \frac{x}{2} = 0 \\
 &\cos \frac{\pi}{2} - 2x - \cos \frac{x}{2} = 0 \\
 &-2 \sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2} \right) \right) \sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2} \right) \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \sin \left( \frac{\pi - 3x}{4} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \left( \frac{\pi}{4} - k\pi \right) \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\quad \vee \\
 &\Rightarrow \sin \left( \frac{\pi - 5x}{4} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \left( \frac{\pi}{4} - k\pi \right) \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

iii)  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$ .

**Hint:**  $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$  y  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

En esta ecuación la estrategia es utilizar convenientemente las identidades del hint

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{3 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}{2} &= \frac{3}{2} \\ 3 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x &= 3 \\ \cos 6x + \cos 2x + \cos 4x &= 0 \\ 2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x &= 0 \\ \cos 4x(2 \cos 2x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

$\vee$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

iv)  $\tan(2x) + \cot(x) = 8 \cos^2 x$

Esta ecuación utiliza sucesivamente la identidad  $\sin 2\alpha$ :

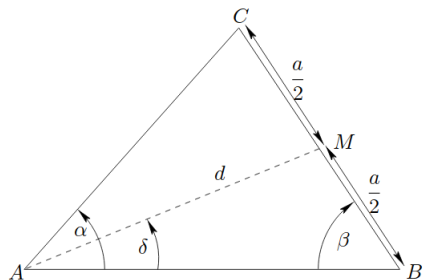
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} &= 8 \cos^2 x \\ \frac{\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x}{\cos 2x \sin x} &= 8 \cos^2 x \\ \sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x &= 8 \cos^2 x \cos 2x \sin x \\ \cos(2x - x) &= 8 \cos^2 x \cos 2x \sin x \\ \cos x(1 - 8 \cos x \cos 2x \sin x) &= 0 \\ \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Desarrollando la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 1 - 8 \cos x \cos 2x \sin x &= 0 \\ 1 - 4 \sin 2x \cos 2x &= 0 \\ 1 - 2 \sin(4x) &= 0 \\ \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \left( k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} \right) \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**P3.** En el triángulo  $ABC$  de la figura,  $M$  es el punto medio del lado  $BC$ . Usando el teorema del seno, demuestre que:

$$\cot \delta = 2 \cot \alpha + \cot \beta \quad (1)$$



Aplicando el teorema del seno en el triángulo  $ABM$  se tiene que:

$$\sin \delta = \frac{a \sin \beta}{2d} \quad (2)$$

Aplicando teorema del para el triángulo  $AMC$  se tiene que:

$$\sin (\alpha - \delta) = \frac{a \sin \alpha + \beta}{2d} \quad (3)$$

Desarrollando esta última igualdad:

$$\begin{aligned} \sin (\alpha - \delta) &= \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{2d} \\ \sin \alpha \cos \delta - \cos \alpha \sin \delta &= \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{2d} \\ \sin \delta \cdot \left( \sin \alpha \cdot \frac{\cos \delta}{\sin \delta} - \cos \alpha \right) &= \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{2d} \end{aligned}$$

Reemplazando  $\sin \delta$  con la expresión de la ecuación (2) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{a \sin \beta}{2d} \cdot (\sin \alpha \cdot \cot \delta - \cos \alpha) &= \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{2d} \\ \frac{\cancel{a} \sin \beta}{\cancel{2d}} \cdot (\sin \alpha \cdot \cot \delta - \cos \alpha) &= \frac{\cancel{a} \sin (\alpha + \beta)}{\cancel{2d}} \\ \sin \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \cot \delta - \cos \alpha) &= \sin (\alpha + \beta) \\ \sin \alpha \cdot \cot \delta - \cos \alpha &= \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta} \\ \cot \delta &= \left( \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta} + \cos \alpha \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \beta \sin \alpha}{\sin \beta \sin \alpha} + \cot \alpha \\ &= \cot \beta + \cot \beta + \cot \alpha \\ &= 2 \cot \beta + \cot \alpha \end{aligned}$$