

MA1001-2 : Introducción al Cálculo  
 Profesor : Jorge San Martín  
 Auxiliar : Nicole Fruns Paz, Álvaro Becerra Monroy



## Auxiliar 2: Axiomas de Orden

25 de Marzo de 2019

### Resumen

#### Ax. 6 Tricomía

$\forall x \in \mathbb{R}$  sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- a)  $x \in \mathbb{R}_*^+$
- b)  $-x \in \mathbb{R}_*^+$
- c)  $x = 0$

#### Ax.7 Clausura $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

- a)  $(x + y) \in \mathbb{R}_+^*$
- b)  $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$

#### Relaciones de Orden

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ :

- i)  $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}_+^*$
- ii)  $x > y \iff (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$
- iii)  $x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)$
- iv)  $x \geq y \iff (y < x) \vee (x = y)$

#### Propiedades de Orden

- (1)  $x > 0 \iff x \in \mathbb{R}_+^*$
- (2)  $x$  negativo  $\iff x < 0$
- (3)  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$  cumple solo una de la siguientes porposiciones:
  - i)  $x < y$
  - ii)  $y < x$
  - iii)  $x = y$
- (4)  $x < y$  y  $a \in \mathbb{R} \implies x + a < y + a$

(5) i)  $x < y$  y  $a > 0 \implies ax > ay$

ii)  $x < y$  y  $a < 0 \implies ax < ay$

(6)  $\forall x \in \mathbb{R} x^2 \geq 0$

(7)  $x < y \wedge u < v \implies x + u < y + v$

(8)  $0 < x < y \wedge 0 < u < v \implies xy < yv$

(9) i)  $(x < 0) \wedge (y > 0) \implies xy < 0$

ii)  $(x < 0) \wedge (y < 0) \implies xy > 0$

(10) i)  $x > 0 \implies x^{-1} > 0$

ii)  $x < 0 \implies x^{-1} > 0$

(11)  $0 < x < y \implies x^{-1} < y^{-1}$

#### Propiedades del módulo

(1)  $|x| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

(2)  $|x| = 0 \iff x = 0$

(3)  $|x| = |-x|$

(4)  $|x^2| = |x|^2 = x^2$

(5)  $-|x| \leq x \leq |x|$

(6)  $|xy| = |x||y|$

(7)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{x}{y} \right|$

(8)  $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

(9)  $|x| \geq a \iff x \geq a \vee x \leq -a$

(10)  $|x - x_0| \leq a \iff -a \leq x - x_0 \leq a$

(11)  $|x - x_0| \geq a \iff x - x_0 \geq a \vee x - x_0 \leq -a$

(12)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

## Preguntas

**P1.** Sean  $x, y$  valores reales estrictamente positivos, demuestre las siguientes desigualdades:

(a)  $2xy \leq x^2 + y^2$

(b)  $2 \leq x + x^{-1}$

(c)  $2 \leq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

(d)  $(a < b) \wedge (c < d) \implies (a + b)(c + d) < 2(ac + bd) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

(e)  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ac + bc + ab$

(f)  $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a + b) \quad (a, b, c \geq 0)$

**Hint:** Utilice adecuadamente las identidades  $a^3 + b^3$ ,  $a^3 + c^3$ ,  $b^3 + c^3$

**P2.** Usando las propiedades de orden en  $\mathbb{R}$  demuestre las siguientes desigualdades:

(a)  $\frac{x^2 + x + 1}{3} \geq x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

(b)  $\frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} \leq \frac{a + b}{2} \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}^+)$

**P3.** Determine el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}$  en términos de intervalo:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x - 4)}{(x - 5)} \geq \frac{(x - 5)}{(x - 8)} \right\}$$

**P4.** Resuelva las siguientes inecuaciones:

(a)  $|x(x^2 - 1)| \leq \left| \frac{x^2 + 3}{x} \right|$

(b)  $\frac{||x| - |x - 2||}{x^2 - 1} \leq 2$