Solución clase Auxiliar 1: Axiomas de los Números Reales

Lunes 18/3/2019, Semana 2.

P0. Demostrar unicidad del neutro e inverso multiplicativo.

Las demostraciones son completamente análogas para el caso de la suma, cambia el uso del Axioma del Opuesto por el Axioma del Inverso, de la misma forma cambia el uso del Neutro Aditivo por el uso del Neutro Multiplicativo.

Si se supone que el neutro multiplicativo no es único entonces existen e_1, e_2 tal que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$x \cdot e_1 = x \tag{1}$$
$$x \cdot e_2 = x \tag{2}$$

La igualdad (1), se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$. En específico para e_2. Utilizando el mismo razonamiento para la igualdad (2) y e_1, se obtiene:

$$e_2 \cdot e_1 = e_2 \tag{3}$$
$$e_1 \cdot e_2 = e_1 \tag{4}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
e_2 &= e_2 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_2 && \text{(Conmut.)} && (5)\\
&= e_1 \cdot e_2 = e_1. && && (6)\\
&\therefore e_2 = e_1 && \text{Neutro único} && (7)
\end{aligned}$$

Si se supone que el inverso de $x \neq 0$ no es único entonces existe p_1 y p_2 tal que:

$$x \cdot p_1 = e \tag{8}$$
$$x \cdot p_2 = e \tag{9}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 \cdot e && \text{(E. Neutro)} && (10)\\
&= p_1 \cdot (x \cdot p_2) && \text{(Igualdad (9))} && (11)\\
&= (p_1 \cdot x) \cdot p_2 && \text{(Asoc.)} && (12)\\
&= (x \cdot p_1) \cdot p_2 && \text{(Conmut.)} && (13)\\
&= e \cdot p_2 && \text{(Igualdad (8))} && (14)\\
&= p_2. && \text{(E.Neutro)} && (15)\\
&\therefore p_1 = p_2 && \text{Inverso único} && (16)
\end{aligned}$$

P1. Usando exclusivamente los axiomas de cuerpo y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

(a) (20 min) $\forall x, y \in \mathbb{R} \neq 0, (x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$

Notar que al utilizar los axiomas se debe verificar antes el cumplimiento de las hipótesis de los anteriores.

$$\begin{aligned}
(x+y)\cdot[x^{-1}\cdot y^{-1}] &= [(x+y)\cdot x^{-1}]\cdot y^{-1} && \text{(Asociatividad del paréntesis [])} && (17)\\
&= [xx^{-1}+yx^{-1}]\cdot y^{-1} && \text{(Distributividad)} && (18)\\
&= [1+yx^{-1}]\cdot y^{-1} && \text{(E. Inverso en primer sumando)} && (19)\\
&= 1\cdot y^{1}+(yx^{-1})\cdot y^{-1} && \text{(Distributividad)} && (20)\\
&= y^{1}\cdot 1+(x^{-1}y)\cdot y^{-1} && \text{(Conmutatividad, dos veces)} && (21)\\
&= y^{-1}+(x^{-1}y)\cdot y^{-1} && \text{(E. Neutro }\cdot) && (22)\\
&= y^{-1}+x^{-1}(yy^{-1}) && \text{(Asociatividad)} && (23)\\
&= y^{-1}+x^{-1}\cdot 1 && \text{(E. Inverso)} && (24)\\
&= y^{-1}+x^{-1} && \text{(E.Neutro }\cdot) && (25)\\
&= x^{-1}+y^{-1} && \text{(Conmutatividad +)} && (26)
\end{aligned}$$

(b) (20 min) $\forall x, y \in \mathbb{R} \neq 0, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

En esta pregunta se pide demostrar la existencia del inverso de una expresión. Se debe utilizar apropiadamente el axioma del inverso.

$$x, y \in \mathbb{R} \neq 0 \implies \exists \text{ inverso de } (xy)$$
$$\text{Basta demostrar que: } (xy)\cdot y^{-1}x^{-1} = 1.$$

Lo cual es cierto ya que:

$$\begin{aligned}
(xy)\cdot[y^{-1}\cdot x^{-1}] &= [(xy)\cdot y^{-1}]\cdot x^{-1} && \text{(Asociatividad parentesis [])} && (27)\\
&= [x(y\cdot y^{-1})]\cdot x^{-1} && \text{(Asociatividad paentesis ())} && (28)\\
&= [x\cdot 1]\cdot x^{-1} && \text{(E. Inverso)} && (29)\\
&= x\cdot x^{-1} && \text{(E. Neutro)} && (30)\\
&= 1 && \text{(E. Inverso)} && (31)
\end{aligned}$$

Al demostrar la igualdad se demuestra que la expresión $y^{-1}x^{-1}$ corresponde al inverso de xy, es decir, es igual a $(xy)^{-1}$.

(c) (20 min) Usando **(b)**, demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0, ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$

Utilizando la propiedad anterior y partiendo por el lado derecho, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(ad+cb)(bd)^{-1} &= (ad+cb)[b^{-1}d^{-1}] && \text{(Propiedad b)} && (32)\\
&= [(ad+cb)b^{-1}]d^{-1} && \text{(Asociatividad)} && (33)\\
&= [(ad)b^{-1}+c(bb^{-1})]d^{-1} && \text{(Distributividad y Asociatividad)} && (34)\\
&= [(ad)b^{-1}]d^{-1}+(c\cdot 1)d^{-1} && \text{(Distr. y E. Inv)} && (35)\\
&= [a(db^{-1})]d^{-1}+(c\cdot 1)d^{-1} && \text{(Asociatividad)} && (36)\\
&= [(ab^{-1})d)]d^{-1}+(c\cdot 1)d^{-1} && \text{(Conmut y Asociatividad)} && (37)\\
&= (ab^{-1})[dd^{-1}]+cd^{-1} && \text{(Asoc y E. Neutro)} && (38)\\
&= (ab^{-1})\cdot 1+cd^{-1} && \text{(E. Inv)} && (39)\\
&= ab^{-1}+cd^{-1} && \text{(E. Neutro)} && (40)
\end{aligned}$$

En consecuencia queda demostrada la igualdad.

(d) (20 min) $\forall a\in\mathbb{R}, a^2=0 \implies a=0$.
Este ejercicio es **importante** debido a que utiliza **dos propiedades fácilmente confundibles por axiomas**.
Estas propiedades corresponden a:

i) $\forall x\in\mathbb{R}$, la ecuación $x\cdot a=b,\ a\neq 0$ tiene solución y es única.

ii) $\forall a\in\mathbb{R},\ a\cdot 0=0$

La demostración de estas dos propiedades se encuentran en el apunte oficial del curso, por lo que no se replicará aquella demostración en la pauta.
Para el caso en $a=0$, se tiene que la proposición se cumple por ii). Para el caso en que $a\neq 0$ podemos aseverar la existencia del inverso a^{-1} por axioma del inverso multiplicativo y por la propiedad i) se puede afirmar:

$$\begin{aligned}
& a\cdot a=0 && && (41)\\
\iff\ & (a\cdot a)\cdot a^{-1}=0\cdot a^{-1} && \text{(Prop. i))} && (42)\\
\iff\ & a\cdot(aa^{-1})=0 && \text{(Conmut., Prop. ii) y Asoc)} && (43)\\
\iff\ & a\cdot 1=0 && \text{(E. Inv)} && (44)\\
\iff\ & a=0 && \text{(E. Neutro)} && (45)
\end{aligned}$$

De esta forma queda demostrada la proposición.

P2. Usando sólo los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre fundamentando cada paso,la siguiente propiedad (si necesita alguna propiedad extra, debe demostrarla):

$$\forall a,b,m\in\mathbb{R}\ b,m\neq 0,\ (ma)(mb)^{-1}=ab^{-1} \tag{46}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
(ma)(mb)^{-1} &= (ma)\cdot(m^{-1}b^{-1}) && \textbf{(Prop. demostrada)} && (47)\\
&= (am)\cdot[m^{-1}b^{-1}] && \text{(Conmut.)} && (48)\\
&= [(am)\cdot m^{-1}]b^{-1} && \text{(Asoc.)} && (49)\\
&= [a(m\cdot m^{-1})]\cdot b^{-1} && \text{(Asoc.)} && (50)\\
&= [a\cdot 1]\cdot b^{-1} && \text{(E. Inv.)} && (51)\\
&= a\cdot b^{-1} && \text{E. Neutro} && (52)
\end{aligned}$$

P3. $\forall a \in \mathbb{R}$ se definen:

(a) $a^2 = a \cdot a$

(b) $a^3 = a^2 \cdot a$

(c) $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Utilizando las definiciones anteriores y los axiomas de cuerpo de los reales, mencionándolos cada vez que sean necesarios, demostrar las siguientes identidades:

i) $(a+b)^2 = [a^2 + 2(ab)] + b^2$

Utilizando la definición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{(Definición)} && (53)\\
&= [a(a+b)] + [b(a+b)] && \text{(Dist.)} && (54)\\
&= (aa+ab) + [ba+bb] && \text{(Dist.)} && (55)\\
&= [(aa+ab)+ba] + bb && \text{Asoc.} && (56)\\
&= [aa+(ab+ba)] + bb && \text{Asoc.} && (57)\\
&= [a^2+(ab+ba)] + b^2 && \text{Definición} && (58)\\
&= [a^2+(ab+ab)] + b^2 && \text{(Conmut.)} && (59)\\
&= \Big[a^2 + ([ab]\cdot 1 + [ab]\cdot 1)\Big] + b^2 && \text{(E. Neutro)} && (60)\\
&= [a^2 + ab(1+1)] + b^2 && \text{(Distr.)} && (61)\\
&= [a^2 + ab\cdot 2] + b^2 && \text{(Def: } 1+1=2) && (62)\\
& && && (63)
\end{aligned}$$

El resto de las demostraciones utiliza la misma mecánica.

ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$

iii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

iv) $a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + \cdots + ab^5 + b^6)$

P4. **(a)** Usando los axiomas de los números reales y los teorema de unicidad de neutros e inversos, demuestre la siguiente propiedad, justificando cada paso:

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ -((-a)+b) = a + (-b) \tag{64}$$

Se tiene que demostrar que el opuesto de $(-a)+b$ corresponde a $a+(-b)$. Para esto se debe demostrar que:

$$[(-a)+b] + [a+(-b)] = 0 \tag{65}$$

Esto último es cierto, ya que:

$$\begin{aligned}
[(-a)+b]+\Big[a+(-b)\Big] &= \Big[[(-a)+b]+a\Big]+(-b) && \text{(Asociatividad)} \quad (66)\\
&= \Big[(-a)+[b+a]\Big]+(-b) && \text{(Asociatividad)} \quad (67)\\
&= \Big[(-a)+[a+b]\Big]+(-b) && \text{(Conmutatividad)} \quad (68)\\
&= \Big[[(-a)+a]+b\Big]+(-b) && \text{(asociatividad)} \quad (69)\\
&= [a+(-a)]+\Big[b+(-b)\Big] && \text{(asociatividad y conmut)} \quad (70)\\
&= 0+0 && \text{(E. Opuesto)} \quad (71)\\
&= 0 && \text{(E. Neutro)} \quad (72)
\end{aligned}$$

(b) Usando los axiomas de los números reales y los teorema de unicidad de neutros e inversos, demuestre la siguiente propiedad, justificando cada paso:

i) $\forall a \in \mathbb{R}$, $(-1)\cdot a = -a$

Se debe demostrar que el opuesto de a corresponde a: $(-1)\cdot a$. Esto es equivalente a demostrar que:

$$a+(-1)\cdot a = 0 \quad (73)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
a+(-1)\cdot a &= a\cdot 1+(-1)\cdot a && \text{(E. Neutro)} \quad (74)\\
&= a\cdot 1 + a\cdot(-1) && \text{(Conmutatividad)} \quad (75)\\
&= a\cdot(1+(-1)) && \text{(Distributividad)} \quad (76)\\
&= a\cdot 0 && \text{(E. Opuesto)} \quad (77)\\
&= 0 && (\textbf{Prop. demostrada}) \quad (78)
\end{aligned}$$

ii) Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$ $b, c \neq 0$, entonces:

$$(ab^{-1}+c^{-1})[(bc)(ac+b)^{-1}] = 1 \quad (79)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(ab^{-1}+c^{-1})\Big[(bc)(ac+b)^{-1}\Big] &= \Big[(ab^{-1}+c^{-1})(bc)\Big](ac+b)^{-1} && \text{(Asociatividad)} \quad (80)\\
&= \Big[(ab^{-1})(bc)+c^{-1}(bc)\Big](ac+b)^{-1} && \text{(Distributividad)} \quad (81)\\
&= \Big[a\Big(b^{-1}(bc)\Big)+(bc)c^{-1}\Big](ac+b)^{-1} && \text{(Asociat. y conmut.)} \quad (82)\\
&= \Big[a\Big((b^{-1}b)c\Big)+b(cc^{-1})\Big](ac+b)^{-1} && \text{(Asociat. 2 veces.)} \quad (83)\\
&= \Big[a\Big((bb^{-1})c\Big)+b(cc^{-1})\Big](ac+b)^{-1} && \text{(Conmutatividad)} \quad (84)\\
&= \Big[a\Big(c\cdot 1\Big)+b\cdot 1\Big](ac+b)^{-1} && \text{(Inv. y Conmut.)} \quad (85)\\
&= \Big[ac+b\Big](ac+b)^{-1} && \text{(E.Neutro)} \quad (86)\\
&= 1 && \text{(E. Inverso)} \quad (87)
\end{aligned}$$

Notar que cada igualdad debe **ser justificada a través de axiomas**.