

Auxiliar 12: Límites de funciones

15 de junio de 2019

Profesores: Jorge San Martín

Auxiliar: Álvaro Becerra

Email: alvaro.becerra@ug.uchile.cl

P1. Usando la definición de límite demuestre que:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{e^x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-1} = 2$. (Use caract. $\epsilon - \delta$)

d) **(Propuesto)** $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

P2. Calcule los siguientes límites si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{ax} - 1}{x - 1}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\pi x)}{\sin(x^2)}$.

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}$

P3. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisface la propiedad:

$$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

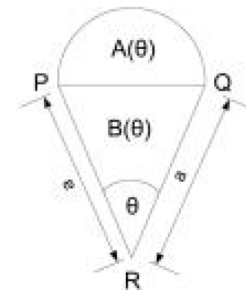
entonces $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Verifique que las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = \sin(x)$ (**Hint:** $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$), satisfacen esta propiedad, pero $f(x) = x^2$ no la cumple.

P4. (Propuesto) Un semicírculo de diámetro PQ descansa sobre la base de un triángulo isósceles PQR para formar la región de la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo isósceles ($\overline{PR} = \overline{QR} = a$), se pide calcular:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{A(\theta)}{\theta \cdot B(\theta)}$$



Resumen

1. Límite de una función

Definición 1.1 (Punto de acumulación). Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\bar{x}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \neq \bar{x}, \forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \rightarrow \bar{x}$

Definición 1.2 (Límite). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x}$ punto de acumulación de A . Diremos que f tiende al real $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x}$ (i.e. $f(x) \rightarrow \ell$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$ (i.e. $\ell = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A , convergente a $\bar{x}$ y tal que $x_n \neq \bar{x}$, se cumple que la sucesión $(f(x_n))$ es convergente a ℓ

Teorema 1.1 (Unicidad del límite). Si una función f tiene límite cuando $x \rightarrow \bar{x}$, entonces dicho límite es único.

Teorema 1.2 (Álgebra de límites). Sean f y g dos funciones y $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tales que: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \ell_2$, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f + g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.
2. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f - g)(x) = \ell_1 - \ell_2$.
3. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$.
4. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f / g)(x) = \ell_1 / \ell_2$.
5. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha f(x) = \alpha \ell_1$.

Teorema 1.3 (Sándwich). Sean f, g , y h tres funciones y $\bar{x} \in (\text{Dom}(g))'$. Si

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \text{Dom}(g) \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

y además $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = \ell$ entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \ell$$

Propiedad 1.1 (Límite de la composición). Si

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow l} (f(y))$$

Teorema 1.4. Si $f : a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x}, \ell$ son tales que: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$, entonces para cualquier subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\bar{x} \in B$ se tiene que $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \ell$

Teorema 1.5. Sea $f : a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A'$. Sean $B, C \subseteq A$, tales que $\bar{x} \in B', \bar{x} \in C'$ y $B \cup C = A$. Si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in C}} f(x) = \ell$$

entonces $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$

Teorema 1.6 (Caracterización $\epsilon - \delta$). $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$ ssi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0), \forall x \in A [0 < |x - \bar{x}| \leq \delta] \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

2. Límites conocidos

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} p_n(x) = p_n(\bar{x})$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} e^x = e^{\bar{x}}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sin x = \sin \bar{x}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |