

Auxiliar Extra C5

7 de junio de 2019

Profesor: Jorge San Martín

Auxiliar: Álvaro Becerra

Email: alvaro.becerra@ug.uchile.cl

P1. Para $n \geq 1$ se definen:

$$x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right), \quad y_n = x_n - \frac{1}{n}$$

i) Demuestre que la sucesión x_n es decreciente y que la sucesión y_n es creciente.

ii) Deduzca que ambas sucesiones convergen y que lo hacen al mismo límite l tal que: $0 \leq l \leq 1$.

iii) Deduzca que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = 1$$

iv) Justifique que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right\} = \ln(2)$$

P2. Calcule en caso de existir los siguientes límites:

a) $\lim \frac{1}{n} \ln(1 + e^{an})$ con $a > 0$

b) $\lim \frac{1}{n} \ln(3 + 2e^n)$

c) $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k})$

d) $\lim \frac{\sqrt[n]{e}-1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$

e) $\lim (\cos(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{n})}}$

P3. Sea $a \in (0, 1)$ fijo. Considere la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ definida mediante la recurrencia:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x(2-x) \leq 1$.

b) Pruebe que $\forall n \geq 1, a_n \in (0, 1)$.

c) Demuestre que $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión monótona.

d) Argumente sobre la convergencia de $(a_n)_{n \geq 1}$ y calcule su límite.

P4. (Control 2, 2002) Para $a > 0$, definimos la sucesión $s_n = \frac{1}{\sqrt[n^2]{a}}$, $n \in \mathbb{N}$ (Nota: $\sqrt[n^2]{a} = r \iff a = r^{n^2}$)

a) Si $0 < a < 1$ pruebe que $\lim(s_n) = 1$.

Hint: Defina la sucesión $h_n = s_n - 1$ y demuestre que $h_n \rightarrow 0$ utilizando desigualdad de Bernoulli y teorema del sándwich.

b) Si $a \geq 1$ pruebe que $\lim(s_n) = 1$.

c) Si $a_n \rightarrow l > 0$, demuestre que:

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n^2]{a_n}} = 1$$

d) Si $a > b > 0$, calcule:

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}}$$

Pauta Auxiliar C5

P1. Para $n \geq 1$ se definen:

$$x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right), \quad y_n = x_n - \frac{1}{n}$$

i) Demuestre que la sucesión x_n es decreciente y que la sucesión y_n es creciente.

x_n decreciente:

Calculamos $x_{n+1} - x_n$ y analizamos el signo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

recordando las desigualdades fundamentales del logaritmo:

$$(\forall x \in (0, \infty)) 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

tenemos que:

$$1 - \frac{n+1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1} - 1$$

construyendo la expresión de $x_{n+1} - x_n$ a partir de esta desigualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 \\ \frac{-1}{n(n+1)} &\leq \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

de quí se deduce que $(\forall n \geq 1) x_{n+1} - x_n \leq 0$ lo que quiere decir que x_n es decreciente.

y_n creciente:

Calculamos $y_{n+1} - y_n$ y analizamos su signo:

$$\begin{aligned}y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - x_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\&= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

aplicando desigualdades fundamentales del logaritmo obtenemos:

$$0 \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

de esto se desprende que $y_{n+1} - y_n \geq 0$ ($\forall n \geq 1$), lo que quiere decir que y_n es creciente.

ii) Deduzca que ambas sucesiones convergen y que lo hacen al mismo límite l tal que: $0 \leq l \leq 1$.

En la **P1. Auxiliar 10** demostramos que si u_n es creciente y v_n decreciente tal que $\lim(u_n - v_n) = 0$, entonces tanto u_n como v_n convergen y lo hacen al mismo límite. Este ejercicio es una nueva aplicación de esa propiedad general ya que:

$$\lim(y_n - x_n) = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

y luego por álgebra de límites, utilizando la propiedad referenciada se tiene:

$$\lim(x_n) = \lim(y_n)$$

El procedimiento particular para llegar al resultado anterior es el siguiente:

$$x_n \geq x_n - \frac{1}{n} \iff x_n \geq y_n \quad (\forall n \geq 1)$$

Como x_n decreciente se tiene que:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq y_n \quad (\forall n \geq 1)$$

luego y_n es acotada superiormente en particular por x_1 :

$$y_n \leq x_1$$

Como y_n es creciente y acotada superiormente entonces converge (teorema de sucesiones monótonas), además, como vimos anteriormente $y_n - x_n$ también es una sucesión convergente, luego por álgebra de límites:

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) - \lim(y_n - x_n) = \lim(y_n) - \lim \frac{-1}{n} = \lim(y_n)$$

por lo tanto x_n también converge y lo hace al mismo límite que y_n , llamando a este límite l , debido a la monotonía de las sucesiones se tiene que:

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq l \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1$$

en particular para $n = 1$

$$y_1 \leq l \leq x_1 \iff 0 \leq l \leq 1$$

iii) Deduzca que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = 1$$

Notamos que:

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{x_n + \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{x_n}{\ln(n)} + 1$$

Como $\frac{1}{\ln(n)}$ es nula y x_n converge:

$$\frac{x_n}{\ln(n)} \rightarrow 0$$

sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = 1$$

iv) Justifique que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right\} = \ln(2)$$

Analizando la expresión dentro del límite:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= x_{2n} + \ln(2n) - x_n - \ln(n) \\ &= x_{2n} - x_n + \ln \frac{2n}{n} \\ &= x_{2n} - x_n + \ln(2) \end{aligned}$$

luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{2n} - x_n + \ln(2) \right)$$

vemos también que los términos de la sucesión x_{2n} están contenidos dentro de de la sucesión x_n , esto implica que convergen al mismo límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

luego, aplicando álgebra de límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{2n} - x_n + \ln(2) \right) = \ln(2)$$

con esto se demuestra que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right\} = \ln(2)$$

P2. Calcule en caso de existir los siguientes límites:

a) $\lim n(n^2(\exp(\frac{1}{n^2}) - 1) - 1)$

b) $\lim(\frac{\ln(n)}{n})$

c) $\lim \frac{(\ln(n))^2}{n}$

d) $\lim \frac{1}{n} \ln(1 + e^{an})$ con $a > 0$.

Trabajamos la expresión dentro del límite:

$$\frac{1}{n} \ln(1 + e^{an}) = \ln(\sqrt[n]{1 + e^{an}})$$

vemos que para $a > 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{e^{an}} &\leq \sqrt[n]{1 + e^{an}} \leq \sqrt[n]{2e^{an}} \\ e^a &\leq \sqrt[n]{1 + e^{an}} \leq e^a \sqrt[n]{2}\end{aligned}$$

por teorema del sándwich la sucesión $\sqrt[n]{1 + e^{an}} \rightarrow e^a$. Esto implica que:

$$\ln(\sqrt[n]{1 + e^{an}}) \rightarrow \ln(e^a) = a$$

e) $\lim \frac{1}{n} \ln(3 + 2e^n)$

Análogo al procedimiento anterior:

$$\frac{1}{n} \ln(3 + 2e^n) = \ln(\sqrt[n]{3 + 2e^n})$$

analizando lo que está dentro del logaritmo ($\forall n \geq 1$):

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{2e^n} &\leq \sqrt[n]{3 + 2e^n} \leq \sqrt[n]{4e^n} \\ e \sqrt[n]{2} &\leq \sqrt[n]{3 + 2e^n} \leq e \sqrt[n]{4}\end{aligned}$$

por teorema del sándwich $\sqrt[n]{3 + 2e^n} \rightarrow e$ y luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln(3 + 2e^n) \right) = \ln(e) = 1$$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Analizando lo que está dentro de la sumatoria:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k))$$

la sumatoria corresponde a una telescópica, de esta forma sólo sobrevive el primer y último término:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{n} (\ln(n+1) - \ln(1)) = \frac{1}{n} \ln(n+1) = \ln(\sqrt[n]{n+1})$$

Como la sucesión $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}\right) = \ln(1) = 0$$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

Como se vio en clases y en el apunte (pág. 190) se tienen los siguientes dos límites conocidos:

Sea $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} = e^a \quad (1)$$

Sea $a_n \rightarrow a \in (0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n - \ln a}{a_n - a} = \frac{1}{a} \quad (2)$$

El objetivo de esta pregunta es construir ambas expresiones para obtener límites conocidos, teniendo esto en cuenta, trabajamos la expresión al interior del límite:

$$\frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} \cdot \frac{\frac{1}{n} - 0}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

acá podemos reconocer la sucesión convergente:

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} \rightarrow e^0 = 1$$

esto se obtiene al utilizar el límite (1)

además utilizando el límite (2), la siguiente sucesión también converge:

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} \rightarrow 1$$

aplicando algebra de límites tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} \bigg/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

h) $\lim \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}}$

Trabajando la expresión dentro del límite se tiene que:

$$\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}} = \exp\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right)$$

pero utilizando identidades trigonométricas:

$$\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

reemplazando:

$$\exp\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) = \exp\left(\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)}{(1 + \cos(1/n))(1 - \cos(1/n))} \right)$$

Del apunte sabemos que si $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a_n) \rightarrow \cos(a)$$

por lo tanto la sucesión:

$$\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad y \quad \frac{1}{1 + \cos(1/n)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

teniendo esto en cuenta ahora analizamos la expresión:

$$\frac{\ln(\cos(1/n))}{(1 - \cos(1/n))}$$

y vemos que en virtud del límite (2):

$$\frac{\ln(\cos(1/n))}{(1 - \cos(1/n))} \rightarrow -1$$

por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{\ln(\cos(\frac{1}{n}))}{(1 + \cos(1/n))(1 - \cos(1/n))} \right) = \exp \left(-1 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

concluyendo:

$$\left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{n})}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$$

P3. Sea $a \in (0, 1)$ fijo. Considere la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ definida mediante la recurrencia:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x(2 - x) \leq 1$.

Esto equivale a demostrar que:

$$x(2 - x) - 1 \leq 0$$

en efecto:

$$\begin{aligned} x(2 - x) - 1 &\leq 0 \\ \iff -x^2 + 2x - 1 &\leq 0 \\ \iff -(x - 1)^2 &\leq 0 \\ \iff (x - 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

en donde la última desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$

b) Pruebe que $\forall n \geq 1, a_n \in (0, 1)$.

Como tenemos una ecuación de recurrencia es adecuado demostrar la proposición utilizando inducción.

Caso base ($n = 1$):

$$a_1 = a \in (0, 1)$$

Hipótesis inductiva: $a_n \in (0, 1)$

Inducción: $a_n \in (0, 1) \implies a_{n+1} \in (0, 1)$

Tomando la hipótesis inductiva se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &< a_n < 1 \\ 1 &< 2 - a_n < 2 \implies (2 - a_n) > 0 \\ \implies a_{n+1} &= a_n(2 - a_n) > 0 \end{aligned}$$

además de la parte a) sabemos que $a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \leq 1$. La igualdad se tiene en el caso en que $a_n = 1$ pero por hipótesis inductiva $a_n < 1$ luego:

$$0 < a_{n+1} < 1 \iff a_{n+1} \in (0, 1)$$

c) Demuestre que $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión monótona.

Para esto calculamos $a_{n+1} - a_n$ y analizamos su signo, en efecto:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n(2 - a_n) - a_n \\ &= a_n(2 - a_n - 1) \\ &= a_n \underbrace{(1 - a_n)}_{> 0} \end{aligned}$$

luego $a_{n+1} - a_n > 0 \iff a_{n+1} > a_n$, esto quiere decir que a_n es monótona creciente.

d) Argumente sobre la convergencia de $(a_n)_{n \geq 1}$ y calcule su límite.

De la parte b) tenemos que $a_n < 1$, ($\forall n \geq 1$), luego al ser creciente y acotada superiormente a_n converge, teniendo en cuenta que la sucesión a_{n+1} toma los mismos términos que la sucesión a_n se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

luego aplicando álgebra de límites:

$$\begin{aligned} l &= l(2 - l) \\ l(1 - 2 + l) &= 0 \\ l(l - 1) &= 0 \implies l = 0 \quad \vee \quad l = 1 \end{aligned}$$

como $a_n \in (0, 1)$ entonces descartamos la solución $l = 0$, de esta forma:

$$\lim(a_n) = 1$$

P4. (Control 2, 2002) Para $a > 0$, definimos la sucesión $s_n = \frac{1}{n^2\sqrt{a}}$, $n \in \mathbb{N}$ (Nota: $\sqrt[n^2]{a} = r \iff a = r^{n^2}$)

a) Si $0 < a < 1$ pruebe que $\lim(s_n) = 1$. **Hint:** Defina la sucesión $h_n = s_n - 1$ y demuestre que $h_n \rightarrow 0$ utilizando desigualdad de Bernoulli y teorema del sándwich.

Sol. Siguiendo las indicaciones definimos la sucesión:

$$h_n = \frac{1}{n^2\sqrt{a}} - 1$$

vemos que $h_n \geq 0$ por lo que podemos utilizar la desigualdad de Bernoulli I:

$$(1 + h_n)^{n^2} \geq 1 + n^2 h_n$$

Notamos que la desigualdad de Bernoulli se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que podemos escoger en particular $n = n^2$, esto con el fin de eliminar la $\sqrt[n^2]{a}$ en el lado izquierdo.

Sigue que:

$$\begin{aligned}(1 + h_n)^{n^2} &= \frac{1}{a} \geq 1 + n^2 h_n \\ \iff \frac{1}{a} - 1 &\geq n^2 h_n \\ \iff \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) &\geq h_n\end{aligned}$$

Con esto hemos encontrado una cota superior para h_n . De esta forma:

$$0 \leq h_n \leq \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \frac{1}{n^2}$$

Como

$$\left(\frac{1}{a} - 1 \right) \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

entonces, en virtud del teorema del sándwich, la sucesión h_n es nula y por álgebra de límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n) + 1 = 0 + 1$$

Por lo tanto $s_n \rightarrow 1$.

b) Si $a \geq 1$ pruebe que $\lim(s_n) = 1$.

Para este caso ya vemos que si bien $a > 1$ entonces $0 < \frac{1}{a} < 1$, utilizando la parte a) y álgebra de límites:

$$\begin{aligned}\lim(s_n) &= \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n^2]{a}}\right) \\ &= \lim\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n^2]{a^{-1}}}}\right)\end{aligned}$$

pero como $a^{-1} \in (0, 1)$ por la parte a):

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt[n^2]{a^{-1}}}\right) = 1$$

luego:

$$\lim \left(\frac{1}{\frac{1}{n^2 \sqrt{a^{-1}}}} \right) = \frac{1}{\lim \left(\frac{1}{n^2 \sqrt{a^{-1}}} \right)} = \frac{1}{1} = 1$$

por lo tanto $s_n \rightarrow 1$

c) Si $a_n \rightarrow l > 0$, demuestre que:

$$\lim \frac{1}{n^2 \sqrt{a_n}} = 1$$

Como $a_n \rightarrow l$, $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que:

$$l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

en particular para $\epsilon = \frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &\leq a_n \leq \frac{3l}{2} \\ n^2 \sqrt{\frac{l}{2}} &\leq n^2 \sqrt{a_n} \leq n^2 \sqrt{\frac{3l}{2}} \\ \iff \frac{1}{n^2 \sqrt{\frac{3l}{2}}} &\leq \frac{1}{n^2 \sqrt{a_n}} \leq \frac{1}{n^2 \sqrt{\frac{l}{2}}} \end{aligned}$$

pero por las partes a) y b) se tiene que:

$$\frac{1}{n^2 \sqrt{\frac{3l}{2}}} \rightarrow 1 \quad \frac{1}{n^2 \sqrt{\frac{l}{2}}} \rightarrow 1$$

luego, por teorema de sándwich:

$$\frac{1}{n^2 \sqrt{a_n}} \rightarrow 1$$

d) Si $a > b > 0$, calcule:

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}}$$

Trabajando la expresión dentro del límite:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} = \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n} \left(\sqrt[n^2]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n^2]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}}$$

como $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ y además $\left(\frac{b}{a}\right)^n \rightarrow 0$, ya que $b > a > 0$, la sucesión

$$s_n = 1 + \frac{b^n}{a^n}$$

converge, luego se puede aplicar algebra de límites utilizando lo obtenido en c):

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \lim \frac{1}{\sqrt[n^2]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}} = 1 \cdot 1 = 1$$