

### Tarea 3

12 de abril antes del C1

1. (Opcional, del IN2201) Considere un mercado con 10 productores de melones, cada uno de ellos puede producir una unidad del bien. Cada productor necesita de un trabajador para que siembre y coseche los melones. El salario (competitivo) de cada trabajador es igual a  $w > 0$ . Tomamos el salario como dato.
  - a. Suponga que de los 10 productores, sólo 5 pueden trabajar en el campo sembrando y cosechando melones (los otros 5 tienen una edad avanzada que no les permite ni sembrar ni cosechar, pero pueden contratar un trabajador para que siembre y coseche los melones). Derive la oferta de mercado. Grafique. HINT: Piense en los costos de oportunidad.
  - b. Suponga que la demanda es  $D(p) = 4$ , para todo  $p \geq 0$ . Interprete esta curva de demanda y encuentre el equilibrio competitivo. Explique cómo las elasticidades de la oferta y la demanda determinan la magnitud de los cambios después de un alza en el salario  $w$ .
2. En este problema derivamos propiedades de estática comparativa para el problema del monopolio. Recuerde que el maximando de una función positiva  $f(x, t)$  coincide con el maximando de la función  $\ln(f(x, t))$ . Sea  $Q(p, t)$  una función de demanda decreciente en el precio  $p$ , donde  $t$  es un parámetro. Suponemos que  $Q$  es diferenciable en  $p$  y estrictamente positiva en el rango relevante.
  - a. Muestre que la elasticidad de la demanda ( $-pQ_p(p, t)/Q(p, t)$ ) cae con  $t$  ssi  $\ln(Q(p, t))$  tiene diferencias crecientes en  $(p, t)$ .
  - b. Suponga que la firma resuelve  $\max_{p \in P} (p - c)Q(p, t)$ , donde  $P \subseteq \mathbb{R}_+$ . Derive una condición suficiente para que  $p$  crezca con  $t$ . Discuta y explique el resultado.
  - c. Cómo depende el precio del monopolista en  $c$  ?
  - d. Es importante suponer que la demanda es cóncava en el precio para derivar resultados de estática comparativa? Es importante que el espacio de precios sea continuo? Discuta.
3. Considere una economía de intercambio de dos bienes y dos agentes con  $u^1(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2)$  y  $u^2(c_1, c_2) = c_1 + ac_2$ , con  $a \in ]0, 1]$ . Suponga que las dotaciones iniciales totales de la economía son tales que  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}_{++}$ .
  - a. Encuentre el conjunto de asignaciones Pareto óptimas de la economía.
  - b. Para cada asignación  $x = (x^1, x^2)$  Pareto óptima de la economía, encuentre el vector de precios  $p$  tal que  $(p, x)$  es un EW de la economía de intercambio con dotaciones iniciales  $x^1$  y  $x^2$ .

- c. Suponga que  $a = 1$  y que  $e_1 = e_2 = 1$ . Considere la asignación Pareto óptima  $x^1 = x^2 = (1/2, 1/2)$ . Suponga además que las dotaciones iniciales son  $e^1 = (3/4; 3/4)$  y  $e^2 = (1/4; 1/4)$ . Muestre que  $(x^1, x^2)$  no puede ser una asignación de equilibrio Walrasiano de la economía de intercambio  $(u^i; e^i)_{i=1,2}$ . Conecte esta observación con el Segundo Teorema de Bienestar? Discuta.
4. (Opcional) Considere una economía de dos bienes y dos agentes con  $e^1 = e^2 = (4, 4)$ ,  $u^1(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$  y  $u^2(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ . Muestre que no existe EW. Qué supuestos del teorema de existencia visto en clases no se tienen?
5. (Opcional) En este modelo consideramos una economía de intercambio con externalidades. Supongamos que hay 3 agentes que consumen dos bienes: el bien 1 es jardinería y el bien 2 comida. Consumir jardinería hace más agradable la visión que uno tiene desde su patio, pero también mejora la visión que el vecino tiene desde su propio patio. Suponemos que los agentes 1 y 2 son vecinos (de modo tal que el consumo de uno de ellos de servicios de jardinería tiene externalidades positivas sobre el otro). El agente 3, sin embargo, vive en las montañas por lo que qué tantos recursos devote a jardinería no afecta la utilidad de 1 y 2. Las funciones de utilidad del agente  $i$  las escribimos  $u^i$  (recuerde que el dominio de la función depende de  $i$ ) y las dotaciones iniciales son  $e^i \in \mathbb{R}_{++}^2$ .
- Discuta cómo modelar las externalidades positivas en los consumos de los agentes 1 y 2.
  - Defina un equilibrio Walrasiano para la economía  $(p, (\bar{x}^i)_{i=1,2,3}) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^6$ .
  - En lo que sigue, suponemos que el equilibrio es interior y que para todo  $i$ ,  $u^i$  es una función cóncava y fuertemente monótona en  $x^i$ . Muestre que en equilibrio, para todo  $i$ 

$$\frac{\partial u^i(\bar{x})}{\partial x_1^i} = \frac{p_1}{p_2}.$$
  - Consideremos ahora una asignación alternativa de las canastas  $\bar{x}$ . Fijemos  $\delta > 0$  pequeño. Argumente que, en el margen, si el agente 1 consume  $\delta$  unidades adicionales del bien 1 y reduce el consumo del bien 2 en  $\delta p_1/p_2$ , entonces se mantiene en la misma curva de indiferencia que en el EW. Análogamente, muestre que si el agente 3 reduce el consumo del bien 1 en  $\delta$  unidades y aumenta el consumo del bien 2 en  $\delta p_1/p_2$ , entonces se mantiene en la misma curva de indiferencia.
  - Argumente que la reasignación descrita en c. es una mejora de Pareto sobre  $\bar{x}$ . Conecte esta observación con el primer teorema de bienestar.
6. Considere un modelo de dos naciones,  $A$  y  $B$ . Hay  $I_A$  agentes en  $A$ ,  $I_B$  agentes en  $B$ .  $I = I_A \cup I_B$  es el conjunto de todos los agentes. La economía tiene  $L$  bienes. Cada agente tiene una dotación inicial  $e^i \in \mathbb{R}_{++}^L$  y una función de utilidad  $u^i: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$  que es fuertemente monótona, continua y cóncava. En esta economía no hay producción. Un equilibrio autárquico (EA) se obtiene cuando las economías están aisladas (es decir, se

obtiene cuando no hay comercio entre los países). En un equilibrio de comercio (EC) existe un solo mercado para cada uno de los bienes en el que los agentes de cada uno de los dos países participan. En ambos modelos, los mercados funcionan perfectamente y nos concentramos en el análisis de EW.

- a. Defina formalmente EA y EC.
  - b. Muestre que es posible que algunos agentes estén mejor en el EA que en el EC.
  - c. Es posible que la asignación de EA Pareto domine la asignación de EC?
7. Una asignación es libre de envidia si cada consumidor prefiere (débil) su propio consumo al de cualquier otro consumidor en la economía. Considere un planificador central que quiere implementar una asignación que sea Pareto eficiente y libre de envidia. Para esto, el planificador puede reasignar las dotaciones iniciales y dejar que la economía encuentre el EW. En consecuencia, lo que el planificador quiere hacer es asignar las dotaciones iniciales de manera tal que el EW resultante sea libre de envidia. Suponga que los supuestos del modelo Walrasiano de intercambio se satisfacen. Encuentre una solución al problema del planificador.

8. Considere una economía de Robinson Crusoe, en el que un consumidor representativo es dueño de la única firma (representativa) productora del bien de consumo. El habitante dispone de  $T > 0$  horas que puede distribuir entre trabajo y ocio. La función de producción de la firma transforma  $h$  unidades de trabajo en  $f(h)$  unidades de consumo donde  $f(0) = 0$  y  $f$  es dos veces diferenciable con  $f' > 0$  y  $f'' < 0$ . La firma, sin embargo, es altamente contaminante de modo que si produce  $y$  unidades de consumo emite  $y$  unidades de contaminación. El consumidor disfruta del consumo y del ocio, pero le molesta la contaminación. Su función de utilidad está dada por  $u(x, l, y)$  donde  $x$  es su consumo,  $l$  es su ocio, e  $y$  es la contaminación de la firma. Suponemos además que la función  $u$  es cóncava en  $(x, l, y)$ . Suponemos que  $u_x, u_l, -u_y > 0$ .

La firma maximiza utilidades y el consumidor maximiza su utilidad sobre consumo y ocio dados los precios y el nivel de contaminación. Normalizamos el precio del consumo  $p_c = 1$ .

- a. Plantee el problema de optimización de la firma y del consumidor en un EW. Obtenga las CPOs para cada problema (suponga solución interior).
- b. Muestre que en cualquier resultado Pareto eficiente (suponiendo solución interior), la cantidad de horas trabajadas  $h^*$  satisface

$$f'(h^*) \left( u_x(x^*, T - h^*, x^*) + u_y(x^*, T - h^*, x^*) \right) = u_l(T - h^*)$$

con  $x^* = f(h^*)$ .

- c. Es el EW Pareto eficiente? Use las partes anteriores para fundamentar su respuesta. Además, explique su respuesta gráficamente.