Auxiliar Repaso

Diland Castro C.

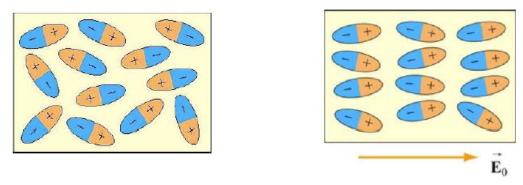
Universidad de Chile

Contenido

Dieléctricos

Conceptos claves

- Los medios dieléctricos se caracterizan por la presencia de dipolos, que contribuyen al campo eléctrico total. Estos dipolos se pueden modelar macroscópicamente mediante la polarización $\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$.



- Cuando un material dieléctrico es colocado en un campo eléctrico, éste induce en cada átomo o molécula un pequeño momento dipolar, apuntando en la misma dicrección que el campo, es decir, el material se polariza.

Dieléctricos lineales y permitividad

El caso más frecuente es el de los dieléctricos lineales, en los cuales la polarización es proporcional al campo aplicado.

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{\mathbf{E}}$$

Donde χ_ϵ es la susceptibilidad del dieléctrico.
De esta relación lineal se deduce que también **D** y **E** son proporcionales.

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

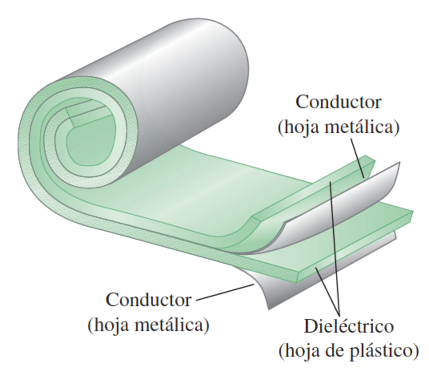
Se denomina a ε_r y ε las permitividades relativa (adimensional) y absoluta (con las dimensiones de la permitividad del vacío) del dieléctrico.

¿Por qué colocar un dieléctrico entre conductores?

La colocación de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones principales.

- La primera es que resuelve el problema mecánico de mantener dos hojas metálicas grandes con una separación muy pequeña sin que hagan contacto.

Gráficamente



¿Por qué colocar un dieléctrico entre conductores?

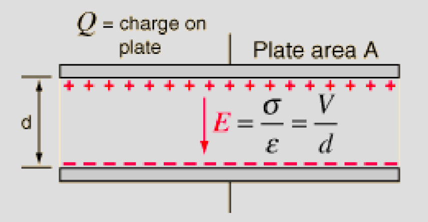
- La segunda función es que un dieléctrico consigue aumentar la diferencia de potencial máxima que el condensador es capaz de resistir sin que el material "se rompa"(ruptura dieléctrica).
  Obs: Muchos materiales dieléctricos toleran sin romperse campos eléctricos más intensos que los que soporta el aire.
  Así que el uso de un dieléctrico permite que un capacitor mantenga una gran diferencia de potencial V y que, por lo tanto, almacene cantidades más grandes de carga y energía.

REVISAR:
`https://youtu.be/wgd68n63tH0`
¿Qué pasó?
El campo eléctrico entre dos conductores es tan grande que supera un valor crítico. Como resultado puede convertir un material no conductor (en este caso el aire) en conductor (Efecto Corona).

¿Por qué colocar un dieléctrico entre conductores?

- La tercera función es que la capacitancia de un capacitor de dimensiones dadas es mayor cuando entre sus placas hay un material dieléctrico en vez de vacío.
- **Recuerdo:** La capacitancia de un condensador de placas paralelas está dado por:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$



Condiciones de Borde

Las ecuaciones de esta sección son las condiciones de borde que deben cumplir $\vec{E}$ y $\vec{D}$ cuando se pasa de un medio material a otro distinto. Generalmente estas condiciones se aplican cuando conocemos los campos en un medio y deseamos saber que ocurre con ellos al otro lado de la superficie de contacto con otro medio.

Condiciones de Borde

Las ecuaciones de esta sección son las condiciones de borde que deben cumplir $\vec{E}$ y $\vec{D}$ cuando se pasa de un medio material a otro distinto. Generalmente estas condiciones se aplican cuando conocemos los campos en un medio y deseamos saber que ocurre con ellos al otro lado de la superficie de contacto con otro medio.

IMPORTANTE: Fijarse en la interfaz (paso de un medio al otro) y verificar las condiciones.

Condiciones de borde

Para el campo eléctrico

Si la interfaz es paralela al campo eléctrico , se tendrá que:

$$E_2^{||} - E_1^{||} = 0 \qquad \rightarrow E_1 = E_2$$

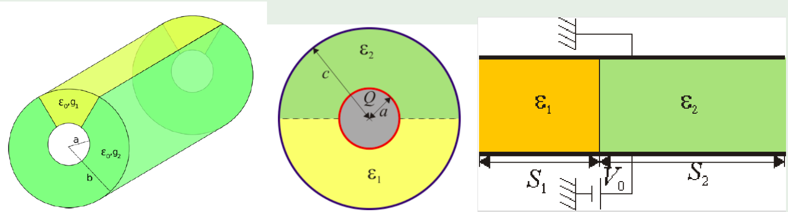
Condiciones de borde

Para el campo eléctrico

Si la interfaz es paralela al campo eléctrico , se tendrá que:

$$E_2^{||} - E_1^{||} = 0 \qquad \rightarrow E_1 = E_2$$

Casos típicos



Condiciones de Borde

Para el Desplazamiento

Si la interfaz es perpendicular al vector desplazamiento , se tendrá que:

$$D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_l$$

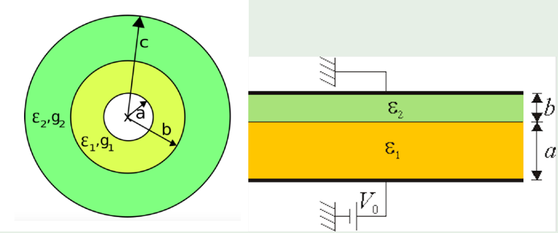
Condiciones de Borde

Para el Desplazamiento

Si la interfaz es perpendicular al vector desplazamiento , se tendrá que:

$$D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_l$$

Casos típicos



Definición de Capacidad

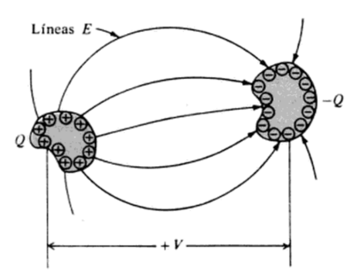
Capacidad

Capacidad es una propiedad de una configuración geométrica, usualmente de dos objetos conductores separados por un medio aislante. Es la medida de cuánta carga es capaz de mantener, cierta configuración particular, cuando se conecta una batería de V volts y luego se quita.

Definición de Capacidad

Capacidad

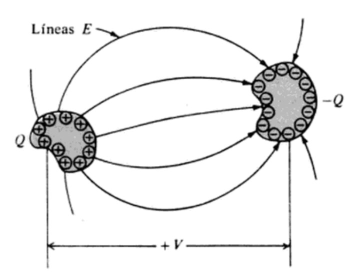
Capacidad es una propiedad de una configuración geométrica, usualmente de dos objetos conductores separados por un medio aislante. Es la medida de cuánta carga es capaz de mantener, cierta configuración particular, cuando se conecta una batería de V volts y luego se quita.



Definición de Capacidad

Capacidad

Capacidad es una propiedad de una configuración geométrica, usualmente de dos objetos conductores separados por un medio aislante. Es la medida de cuánta carga es capaz de mantener, cierta configuración particular, cuando se conecta una batería de V volts y luego se quita.



Por ejemplo, en la figura se muestra dos conductores inicialmente descargados a los que se les **conecta** una batería, a raíz de esto, se depositan dos cargas de valor Q, pero de signo contrario en los dos conductores.
Notar que si los objetos son conductores, la superficie de cada uno de ellos es una equipotencial.

Proceso para encontrar capacitancia - típico problema

1. Fijarse en las condiciones de borde
2. Encontrar campo eléctrico
3. Calcular la diferencia de potencial
4. Utilizar la ecuación para capacitancia:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

5. Verificar que $C > 0$ (NO hay capacitancia negativa).

Corrientes Eléctricas

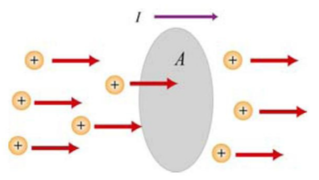
Corrientes Eléctricas

Las corrientes eléectricas son flujos de cargas électricas. Para ilustrar esto supongamos un conjunto de cargas que se mueven perpendicularmente a una superficie de área A, como se muestra en la figura:

Corrientes Eléctricas

Corrientes Eléctricas

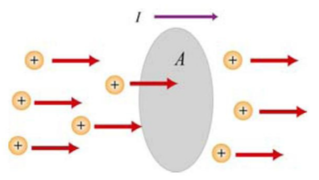
Las corrientes eléectricas son flujos de cargas électricas. Para ilustrar esto supongamos un conjunto de cargas que se mueven perpendicularmente a una superficie de área A, como se muestra en la figura:



Corrientes Eléctricas

Corrientes Eléctricas

Las corrientes eléectricas son flujos de cargas électricas. Para ilustrar esto supongamos un conjunto de cargas que se mueven perpendicularmente a una superficie de área A, como se muestra en la figura:



La corriente eléctrica se define como la tasa a la cual las cargas atraviesan un área transversal.
La unidad en S.I. de la corriente es el ampere (A), con

$$1A = \frac{1[C]}{1seg}$$

Densidad de corriente

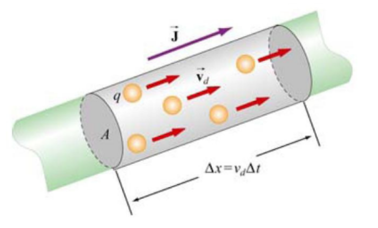
Densidad de corriente

Intentaremos ahora relacionar la corriente (una cantidad macroscópica) con el movimiento de las cargas. Para ello supongamos un conductor de área transversal A, como se muestra en la figura

Densidad de corriente

Densidad de corriente

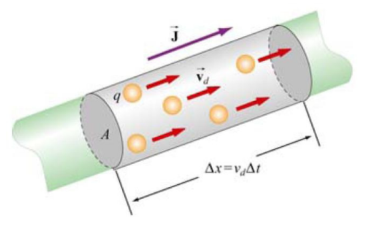
Intentaremos ahora relacionar la corriente (una cantidad macroscópica) con el movimiento de las cargas. Para ello supongamos un conductor de área transversal A, como se muestra en la figura



Densidad de corriente

Densidad de corriente

Intentaremos ahora relacionar la corriente (una cantidad macroscópica) con el movimiento de las cargas. Para ello supongamos un conductor de área transversal A, como se muestra en la figura



Sea la corriente total a través de una superficie escrita como:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Corrientes

Ecuaciones importantes:

$$\vec{J} = g\vec{E}, \quad I = \int \vec{J} \cdot \vec{d}S$$

$$V = IR, \quad P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

En el estado estacionario ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), la carga contenida en un volumen no cambia, por lo que la ley de conservación de la carga se reduce a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Corrientes

Ecuaciones importantes:

$$\vec{J} = g\vec{E}, \quad I = \int \vec{J} \cdot \vec{d}S$$

$$V = IR, \quad P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

En el estado estacionario ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), la carga contenida en un volumen no cambia, por lo que la ley de conservación de la carga se reduce a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Efecto Joule: energía perdida de forma irreversible en forma de calor.

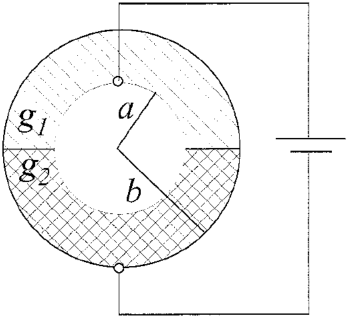
$$P = \int gE^2 dV$$

Problema 1

P1. [Ley de Ohm]
Considere dos esferas conductoras (perfectas) concéntricas, de radios a y b como se muestra en la figura. La mitad del espacio entre las esferas se llena con un medio e conductividad g_1 y la otra mitad con un medio de conductividad g_2.

Hint: Puede suponer que en la superficie interior se distribuye una carga Q.

(a) Calcule la resistencia equivalente entre los dos conductores



Solución Problema 1

Partiremos usando la Ley de Gauss para determinar el campo eléctrico, para ello suponemos que en la superficie interior se distribuye una carga Q, además de una simetría esférica.
Además, en la interfaz podemos notar que la única componente es tangencial. Por ende, $E_{t1} = E_{t2} = E$. Entonces,

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Luego,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

Usamos la Ley de Ohm $\vec{J} = g\vec{E}$. y encontramos los valores para la densidades de corriente, las cuales deben ser distintas pues las conductividades cambian.

$$\vec{J}_1 = \frac{Q \cdot g_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{J}_2 = \frac{Q \cdot g_2}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

Problema 1

Obtenidas las densidades de corriente, podemos encontrar el valor de la corriente integrando, la idea es encontrar la corriente, al igual que la diferencia de potencial y utilizar $R = \frac{\Delta V}{I}$ para obtener la Resistencia.

$$I = \iint J \cdot dS \qquad I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} J \cdot dS$$

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} J_1 dS + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} J_2 dS \right]$$

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} g_1 dS + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_2 dS \right) \right]$$

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} g_1 dS + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_2 dS \right) \right]$$

Usamos que : $dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$

Problema 1

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} g_1 \cdot r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_2 \cdot r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi\right)\right]$$

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\frac{Qd\phi}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} g_1 \cdot \sin(\theta)d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_2 \cdot \sin(\theta)d\theta\right)\right]$$

$$I = \frac{Q}{2\epsilon_0}\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} g_1 \cdot \sin(\theta)d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_2 \cdot \sin(\theta)d\theta\right)$$

$$I = \frac{Q}{2\epsilon_0}\left(g_1 \cdot \left(-cos(\frac{\pi}{2}) + cos(0)\right) + g_2\left(-cos(\pi) + cos(\frac{\pi}{2})\right)\right)$$

$$I = \frac{Q}{2\epsilon_0}\left(g_1(0+1) + g_2(-(-1)+0)\right)$$

$$I = \frac{Q}{2\epsilon_0}\left(g_1 + g_2\right)$$

Problema 1

Ahora, procedemos a calcular el valor de la diferencia de potencial.

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A E \cdot dr = \int_A^B E \cdot dr$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_a^b$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = \Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$

Con esto, ya podemos calcular la resistencia. Obteniendo ...

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left[\frac{1}{2\pi(g_1 + g_2)}\right]$$

Magnetostática

Cosas nuevas...

Ahora, sucede que si dos cargas se están moviendo, existe una fuerza adicional entre ellas debido a este moviento. Esta fuerza se conoce como Fuerza Magnética (dificil de medir).

Magnetostática

Cosas nuevas...

Ahora, sucede que si dos cargas se están moviendo, existe una fuerza adicional entre ellas debido a este moviento. Esta fuerza se conoce como Fuerza Magnética (dificil de medir).

En resumen, cargas en movimiento generan campos magnéticos (y entonces una corriente eléctrica también), y a su vez, campos magnéticos actúan sobre cargas en movimiento (en consecuencia, un campo magnético ejerce una fuerza sobre un conductor con corriente).

Magnetostática

Cosas nuevas...

Ahora, sucede que si dos cargas se están moviendo, existe una fuerza adicional entre ellas debido a este movimiento. Esta fuerza se conoce como Fuerza Magnética (dificil de medir).

En resumen, cargas en movimiento generan campos magnéticos (y entonces una corriente eléctrica también), y a su vez, campos magnéticos actúan sobre cargas en movimiento (en consecuencia, un campo magnético ejerce una fuerza sobre un conductor con corriente).

Comenzaremos por el estudio de la Magnetostática, es decir, el estudio de campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias. Con esto:

$$I = \frac{dq}{dt} = Cte$$

Campo por definición

BIOT SAVART

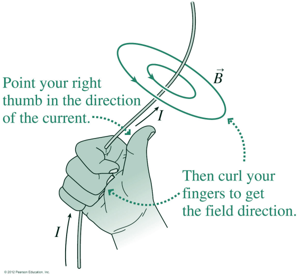
La ley de Biot-Savart, relaciona los campos magnéticos con las corrientes que los crean.

De una manera similar a como la ley de Coulomb relaciona los campos eléctricos con las cargas puntuales que las crean. La obtención del campo magnético resultante de una distribución de corrientes, implica un producto vectorial, y cuando la distancia desde la corriente al punto del campo está variando continuamente, se convierte inherentemente en un problema de cálculo diferencial.

Biot Savart

Usamos la ecuación de Biot - Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$



Fuerza entre circuitos

La **Fuerza Magnética** que el conductor 2 ejerce sobre el conductor 1 será:

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}_2$$

Donde $\vec{B}_2$ corresponde al campo debido a la corriente I_2.
Además sabemos que se cumple:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Problema clásico - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente

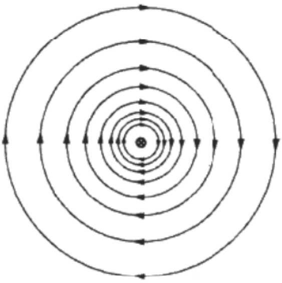
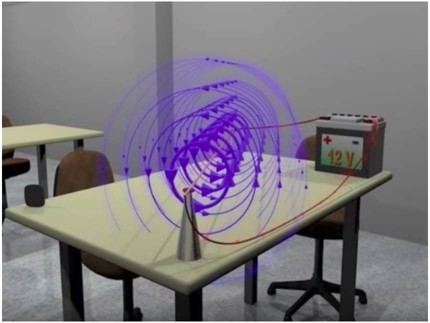


Figura 9 Las líneas del campo magnético son círculos concéntricos en un alambre recto y largo, por el cual fluye una corriente. Su dirección está dada por la regla de la mano derecha.

$$\vec{B}_{hilo\ infinito} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

Problema clásico - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente

VIDEO: Campo magnético generado por un hilo conductor

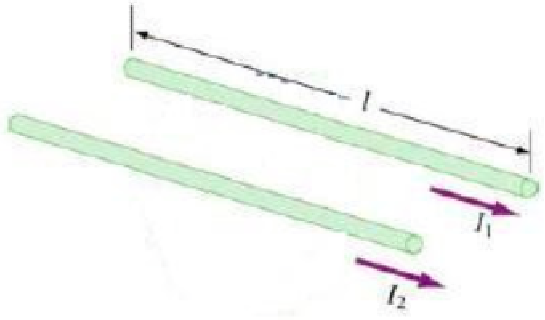


https://youtu.be/LSjn3Jtol6c?t=17s

Problema 2 - Fuerza entre circuitos

P2 [Fuerza entre circuitos]

Considere la situación que se muestra en la figura, donde se encuentra a dos alambres paralelos de largo l, separados por una distancia a los cuales llevan corrientes I_1 e I_2.
Calcule la fuerza entre ambos conductores.

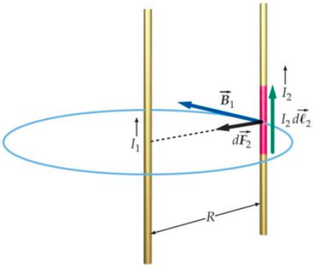


Problema 2 - Fuerza entre circuitos

La **Fuerza Magnética** que el conductor 2 ejerce sobre el conductor 1 será:

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}_2$$

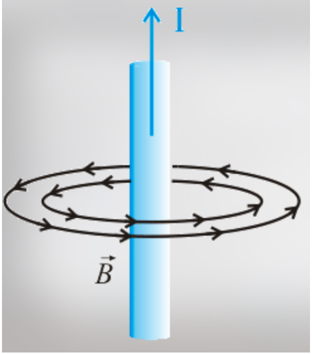
Donde $\vec{B}_2$ corresponde al campo debido a la corriente I_2.
En el problema vamos a calcular la fuerza que el conductor 2 ejerce sobre el 1, entonces, calcularemos el campo magnético que siente el conductor 1 por efecto de la corriente I_2.



Problema 2 - Fuerza entre circuitos

Sabemos que el campo magnético producido por una corriente I que circula por un alambre infinito está dado por:

$$\vec{B}_{hilo\ infinito} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

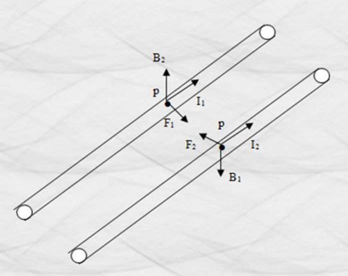


Problema 2 - Fuerza entre circuitos

Entonces, el campo producido en cada punto (evaluamos) del alambre con corriente I_1, producido por el alambre con corriente I_2 está dado por:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{\phi}$$

IMPORTANTE: Para un punto P arbitrario sobre el conductor 1, el campo estará dado por la siguiente expresión, notamos que: $\hat{\phi} = \hat{k}$



Así,

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{k}$$

Problema 2 - Fuerza entre circuitos

Con lo anterior en mente, procedemos a calcular F_{12}

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int_0^l d\vec{l} \times \vec{B}_2$$

Notamos que $\vec{B}_2$ está evaluado en el punto de interés y lo calculamos antes, era :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \hat{k}$$

Por otro lado, $d\vec{l} = dl\hat{j}$.

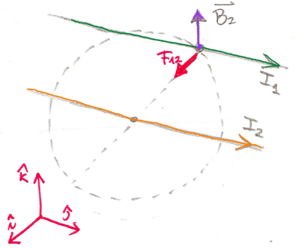
$$\vec{F}_{12} = I_1 l \hat{j} \times \left[\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \hat{k} \right]$$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2 l \mu_0}{2\pi a} \hat{i}$$

Problema 2 - Fuerza entre circuitos

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2 l \mu_0}{2\pi a}\hat{i}$$



¿Puedo inferir algo sobre el sentido de las corrientes y la dirección de la fuerza calculada anteriormente?

- Los conductores se atraerán si las corrientes I_1 e I_2 son de igual signo.
- Los conductores se repelerán si las corrientes I_1 e I_2 son de distinto signo.

Ley de Ampère

Se vió que cargas en movimiento son fuentes de campo magnético. En particular, corrientes estacionarias en un conductor son fuentes de campos magnéticos estáticos (no varían en el tiempo). Tal cual la ley de Gauss en electrostática puede ser muy útil en problemas de geometría simple, para campos magnéticos existe un equivalente, que es la ley integral de Ampére. Ésta se obtiene a partir de la ecuación para el rotor de $\vec{B}$.

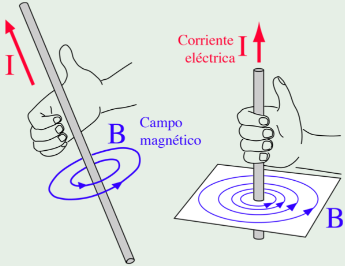
Ecuaciones

$$\vec{\nabla} x \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

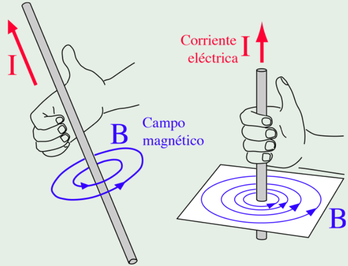
Ley de Ampère

Ley de Ampère



Ley de Ampère

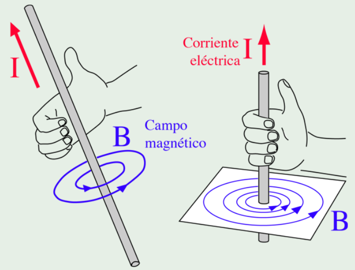
Ley de Ampère



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Ley de Ampère

Ley de Ampère



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Consideraciones

La integral de línea del campo magnético sobre una curva cerrada (circulación), es proporcional al flujo de corriente sobre cualquier superficie cuyo contorno sea esa curva.

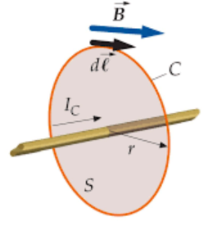
Problema típico

Ejemplo conocido es el campo magnético exterior de una distribución cilíndrica de corriente (muy larga), como se ve en la figura. Debido a la **simetría**, la magnitud del campo magnético debe ser constante a una distancia r del centro del conductor, y su dirección siempre tangente a curvas circulares concéntricas con el conductor. De esta forma:

Problema típico

Ejemplo conocido es el campo magnético exterior de una distribución cilíndrica de corriente (muy larga), como se ve en la figura. Debido a la **simetría**, la magnitud del campo magnético debe ser constante a una distancia r del centro del conductor, y su dirección siempre tangente a curvas circulares concéntricas con el conductor. De esta forma:

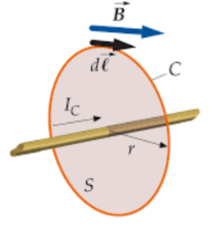
Ley de Ampère



Problema típico

Ejemplo conocido es el campo magnético exterior de una distribución cilíndrica de corriente (muy larga), como se ve en la figura. Debido a la **simetría**, la magnitud del campo magnético debe ser constante a una distancia r del centro del conductor, y su dirección siempre tangente a curvas circulares concéntricas con el conductor. De esta forma:

Ley de Ampère



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada} \rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Problema típico

Problema típico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada} \rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Problema típico

Problema típico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada} \rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Luego,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

*Asignar dirección según corresponda

Problema típico

Problema típico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada} \rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Luego,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

*Asignar dirección según corresponda

Observación

Problemas con simetría cilíndrica son muy sencillos de resolver con la ley de Ampére. El campo interior al conductor se obtiene de la misma forma, pero teniendo en cuenta que en ese caso la corriente encerrada por una trayectoria circular no es I, sino una fracción de ésta.

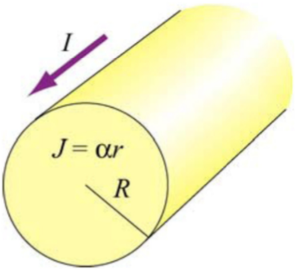
Problema 3

P3. [Ley de Ampére]

Considere un conductor cilíndrico de radio R y de extensión infinita, que lleva una corriente I con una densidad de corriente no uniforme determinada por:.

$$J = \alpha r$$

Donde α es una constante desconocida (debe calcularla) y r es la distancia de un punto interior del conductor al eje de simetría. Determine α y el campo magnético en todo el espacio.



Solución

Dado que nos piden el campo magnético en todo el espacio debemos tener algunas consideraciones:

- La densidad de corriente $\vec{J}$ no es constante, es más, depende de r y de una constante α.
- Tendremos distinta corriente enlazada para el caso $r < R$ y $r > R$.
- A partir de los valores que conocemos debemos obtener la constante α.
- Dado que el sentido de la corriente I no aparece de manera explícita, diremos, para motivos de este problema que va en $\hat{k}$, por ende, las direcciones de los campo magnéticos deberán quedar en la dirección $\hat{\theta}$.
  OBSERVACIÓN: Podían haberse considerado en otro sentido, pero deben ser consistentes y responder a la regla de la mano derecha".

Solución

Entonces, partiendo por el caso más sencillo.

→ **CASO** $r > R$

En este caso, la corriente enlazada corresponde justamente a I. Además se cumple que:

$$I_{enlazada} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta:0}^{2\pi} \int_0^R \alpha r \cdot r dr d\theta = 2\pi\alpha \int_0^R r^2 dr = 2\pi\alpha \frac{R^3}{3}$$

De donde obtenemos el valor de α.

$$\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3} \quad \textbf{[2,0ptos]}$$

Luego, aplicando Ampère y con la corriente enlazada, se obtiene que:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enlazada} = \mu_0 I$$

$$\vec{B}(r)_{r>R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} \quad \textbf{[1,5ptos]}$$

Solución

→ **CASO** $r < R$

Ahora, la corriente enlazada no corresponde a I, sino que debemos calcular la integral, obteniendo que:

$$I_{enlazada} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta:0}^{2\pi} \int_0^r \alpha r \cdot r dr d\theta = 2\pi\alpha \int_0^r r^2 dr = 2\pi\alpha \frac{r^3}{3} \quad \textbf{[1,5ptos]}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enlazada} = \mu_0 \cdot 2\pi\alpha \frac{r^3}{3}$$

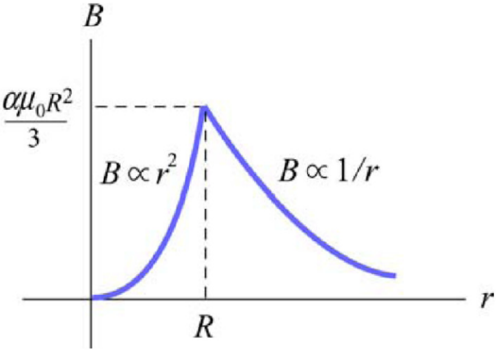
$$\vec{B}(r)_{r<R} = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3} \hat{\theta} \quad \textbf{[1ptos]}$$

Solución

A modo de resumen ...

$$\vec{B}(r)_{r>R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

$$\vec{B}(r)_{r<R} = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3}\hat{\theta}$$



FIN

Diland Castro C.
Departamento Ingeniería Eléctrica