Auxiliar 8 - Campo magnético por definición y Fuerza entre circuitos

Diland Castro

Universidad de Chile

Contenido

RESUMEN

BIOT SAVART

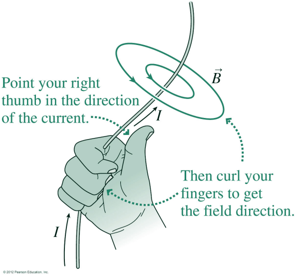
La ley de Biot-Savart, relaciona los campos magnéticos con las corrientes que los crean.

De una manera similar a como la ley de Coulomb relaciona los campos eléctricos con las cargas puntuales que las crean. La obtención del campo magnético resultante de una distribución de corrientes, implica un producto vectorial, y cuando la distancia desde la corriente al punto del campo está variando continuamente, se convierte inherentemente en un problema de cálculo diferencial.

RESUMEN

Usamos la ecuación de Biot - Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$



RESUMEN

FUERZA ENTRE CIRCUITOS

La **Fuerza Magnética** que el conductor 2 ejerce sobre el conductor 1 será:

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}_2$$

Donde $\vec{B}_2$ corresponde al campo debido a la corriente I_2.
Además sabemos que se cumple:

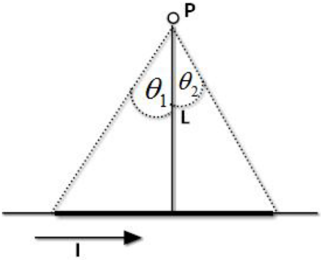
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Problema 1 - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente

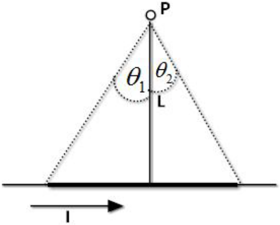
P1. [Campo Magnético por definición]
Considere un cable que lleva una corriente constante I, según se muestra en la figura.

(a) Encuentre el campo magnético generado por un hilo conductor finito (desde $-x_1$ a x_2) en el punto P.

(b) A raíz del resultado anterior, utilizando casos límite para los ángulos θ_1 y θ_2, encuentre el campo magnético de un hilo conductor infinito a una distancia r del mismo.



Problema 1 - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente



Calcularemos el campo por definición. Tomando el eje cable como eje x, con el punto P contenido en el eje y. Además se considerará el inicio del segmento en estudio en $-x_1$ y el final en x_2.
Además se debe notar que el punto donde se quiere calcular el campo es $\vec{r} = L\hat{\jmath}$, mientras que los puntos donde se produce el campo son de la forma $\vec{r}' = x\hat{\imath}$.

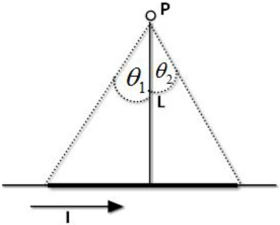
Problema 1 - Campo de un hilo infinito con corriente

Es decir,

$$\vec{r} = L\hat{\jmath} \qquad \vec{r}' = x\hat{\imath}$$

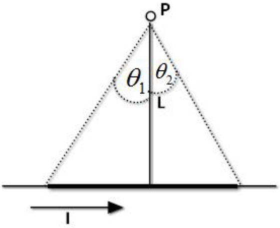
Usamos la ecuación de Biot - Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$



Problema 1 - Campo de un hilo infinito

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-x_1}^{x_2} \frac{I dx \hat{\imath} \times (L\hat{\jmath} - x\hat{\imath})}{||L\hat{\jmath} - x\hat{\imath}||^3} = \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \int_{-x_1}^{x_2} \frac{dx \hat{k}}{(x^2 + L^2)^{3/2}}$$

Problema 1 - Campo de un hilo infinito

Notemos que x se puede escribir como $x = L\tan(\theta)$, donde θ es el ángulo que se forma entre el vector que une P con x y la vertical. Haciendo el cambio de variable, entonces, habrá que integrar desde $-\theta_1$ hasta θ_2. La integral queda, entonces, como sigue:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IL\hat{k}}{4\pi}\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{L\sec^2(\theta)d\theta}{L^3\sec^3(\theta)} = \frac{\mu_0 I\hat{k}}{4\pi L}\int_{-\theta_1}^{\theta_2} cos(\theta)d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I\hat{k}}{4\pi L}(\sin(\theta_2) - \sin(-\theta_1)) = \frac{\mu_0 I\hat{k}}{4\pi L}(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1))$$

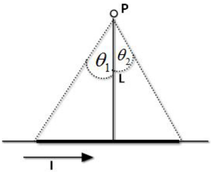
Problema 1 - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente

A continuación, dado que teníamos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi L}(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1))$$

En el caso límite (alambre infinito) y a una distancia r arbitraria, se tendrá que:

$$\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad y \quad \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$



Reemplazando en la expresión para el campo, se obtendrá que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}$$

Problema 1 - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente

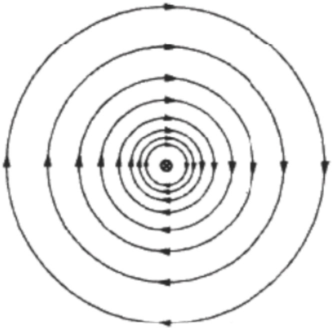
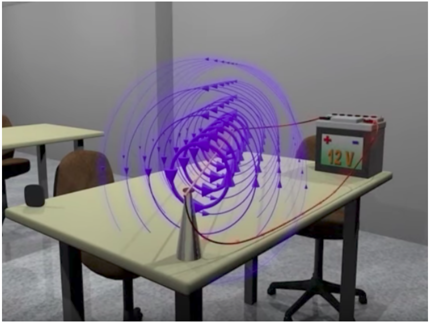


Figura 9 Las líneas del campo magnético son círculos concéntricos en un alambre recto y largo, por el cual fluye una corriente. Su dirección está dada por la regla de la mano derecha.

Problema 1 - Cálculo del campo magnético de un hilo infinito con corriente

VIDEO: Campo magnético generado por un hilo conductor

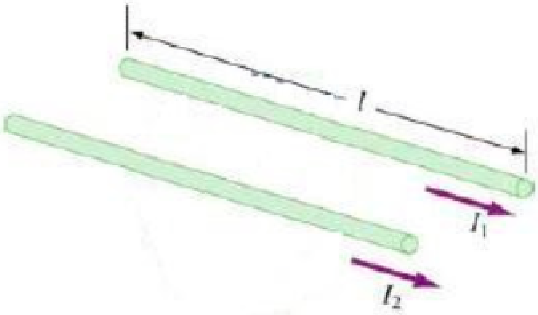


https://youtu.be/LSjn3Jtol6c?t=17s

Problema 2 - Fuerza entre circuitos

P2 [Fuerza entre circuitos]

Considere la situación que se muestra en la figura, donde se encuentra a dos alambres paralelos de largo l, separados por una distancia a los cuales llevan corrientes I_1 e I_2.
Calcule la fuerza entre ambos conductores.

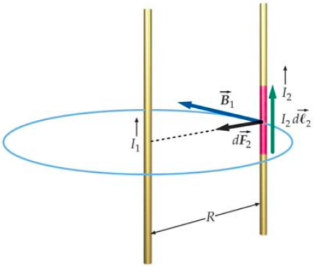


Problema 2 - Fuerza entre circuitos

La **Fuerza Magnética** que el conductor 2 ejerce sobre el conductor 1 será:

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}_2$$

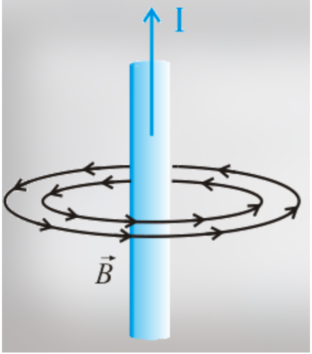
Donde $\vec{B}_2$ corresponde al campo debido a la corriente I_2.
En el problema vamos a calcular la fuerza que el conductor 2 ejerce sobre el 1, entonces, calcularemos el campo magnético que siente el conductor 1 por efecto de la corriente I_2.



Problema 2 - Fuerza entre circuitos

Sabemos que el campo magnético producido por una corriente I que circula por un alambre infinito está dado por:

$$\vec{B}_{hilo\ infinito} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

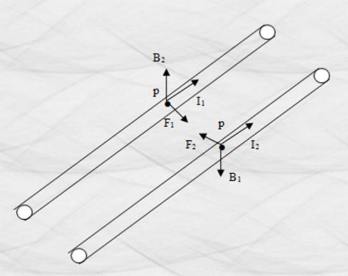


Problema 1 - Fuerza entre circuitos

Entonces, el campo producido en cada punto (evaluamos) del alambre con corriente I_1, producido por el alambre con corriente I_2 está dado por:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{\phi}$$

IMPORTANTE: Para un punto P arbitrario sobre el conductor 1, el campo estará dado por la siguiente expresión, notamos que: $\hat{\phi} = \hat{k}$



Así,

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{k}$$

Problema 1 - Fuerza entre circuitos

Con lo anterior en mente, procedemos a calcular F_{12}

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int_0^l d\vec{l} \times \vec{B}_2$$

Notamos que $\vec{B}_2$ está evaluado en el punto de interés y lo calculamos antes, era :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{k}$$

Por otro lado, $d\vec{l} = dl\hat{j}$.

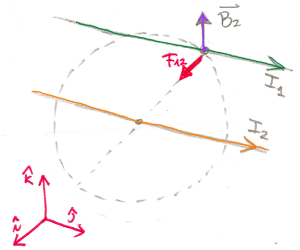
$$\vec{F}_{12} = I_1 l\hat{j} \times \left[\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{k}\right]$$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2 l \mu_0}{2\pi a}\hat{i}$$

Problema 1 - Fuerza entre circuitos

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2 l \mu_0}{2\pi a}\hat{i}$$



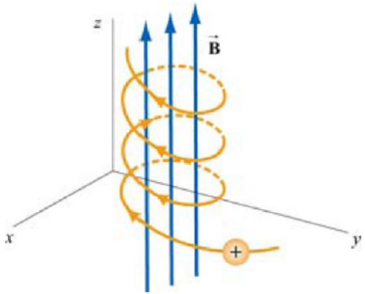
¿Puedo inferir algo sobre el sentido de las corrientes y la dirección de la fuerza calculada anteriormente?

- Los conductores se atraeran si las corrientes I_1 e I_2 son de igual signo.
- Los conductores se repelerán si las corrientes I_1 e I_2 son de distinto signo.

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

P3. [Fuerza de Lorentz]
En un espacio en que existe un campo magnético uniforme $B_0\hat{k}$, una partícula de carga $q > 0$ y masa m se mueve con velocidad inicial $v_{0x}\hat{\imath} + v_{0z}\hat{k}$ desde el origen.

- **a** Demuestre que la trayectoria de la partícula describe una hélice.
- **b** Sorpréndase con lo fascinante que resulta la demostración.



Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Para resolver el problema debemos plantear la segunda ecuación de Newton para la partícula en estudio.
La fuerza total que actúa sobre la partícula es la Fuerza de Lorentz (estamos asumiendo que no hay gravedad).

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Para resolver el problema debemos plantear la segunda ecuación de Newton para la partícula en estudio.
La fuerza total que actúa sobre la partícula es la Fuerza de Lorentz (estamos asumiendo que no hay gravedad).

$$\vec{F} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k})$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Para resolver el problema debemos plantear la segunda ecuación de Newton para la partícula en estudio.
La fuerza total que actúa sobre la partícula es la Fuerza de Lorentz (estamos asumiendo que no hay gravedad).

$$\vec{F} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k})$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) \times B_0\hat{k}$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Para resolver el problema debemos plantear la segunda ecuación de Newton para la partícula en estudio.
La fuerza total que actúa sobre la partícula es la Fuerza de Lorentz (estamos asumiendo que no hay gravedad).

$$\vec{F} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k})$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) \times B_0\hat{k}$$

$$\vec{F} = -q\dot{x}B_0\hat{\jmath} + qB_0\dot{y}\hat{\imath}$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Para resolver el problema debemos plantear la segunda ecuación de Newton para la partícula en estudio.
La fuerza total que actúa sobre la partícula es la Fuerza de Lorentz (estamos asumiendo que no hay gravedad).

$$\vec{F} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k})$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) \times B_0\hat{k}$$

$$\vec{F} = -q\dot{x}B_0\hat{\jmath} + qB_0\dot{y}\hat{\imath}$$

Se resolverá la ecuación para cada coordenada. La ecuación en z es la más fácil:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Para resolver el problema debemos plantear la segunda ecuación de Newton para la partícula en estudio.
La fuerza total que actúa sobre la partícula es la Fuerza de Lorentz (estamos asumiendo que no hay gravedad).

$$\vec{F} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k})$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) \times B_0\hat{k}$$

$$\vec{F} = -q\dot{x}B_0\hat{\jmath} + qB_0\dot{y}\hat{\imath}$$

Se resolverá la ecuación para cada coordenada. La ecuación en z es la más fácil:

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Sin embargo, las ecuaciones en x e y están acopladas:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Sin embargo, las ecuaciones en x e y están acopladas:

$$m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \tag{2}$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Sin embargo, las ecuaciones en x e y están acopladas:

$$m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \tag{2}$$

Integrando entre 0 y t la segunda ecuación nos lleva a que:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Sin embargo, las ecuaciones en x e y están acopladas:

$$m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \tag{2}$$

Integrando entre 0 y t la segunda ecuación nos lleva a que:

$$m\dot{y} = -qB_0 x \tag{3}$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Sin embargo, las ecuaciones en x e y están acopladas:

$$m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \tag{2}$$

Integrando entre 0 y t la segunda ecuación nos lleva a que:

$$m\dot{y} = -qB_0x \tag{3}$$

Reemplazando $\dot{y}$ en la primera:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Sin embargo, las ecuaciones en x e y están acopladas:

$$m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \tag{2}$$

Integrando entre 0 y t la segunda ecuación nos lleva a que:

$$m\dot{y} = -qB_0 x \tag{3}$$

Reemplazando $\dot{y}$ en la primera:

$$\ddot{x} + \frac{q^2 B_0^2}{m^2}x = 0$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Llamando $\omega^2 := \frac{{B_0}^2 q^2}{m^2}$, la solución general se puede escribir como:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Llamando $\omega^2 := \frac{{B_0}^2 q^2}{m^2}$, la solución general se puede escribir como:

$$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Llamando $\omega^2 := \frac{{B_0}^2 q^2}{m^2}$, la solución general se puede escribir como:

$$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Como x en cero vale cero, B debe valer cero (no confundir con B_0). Es decir:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Llamando $\omega^2 := \frac{{B_0}^2 q^2}{m^2}$, la solución general se puede escribir como:

$$x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Como x en cero vale cero, B debe valer cero (no confundir con B_0). Es decir:

$$x = A\sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x} = A\omega\cos(\omega t)$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Imponiendo que la velocidad inicial en x es v_{0x}, se llega a que:

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Imponiendo que la velocidad inicial en x es v_{0x}, se llega a que:

$$A = \frac{v_{0x}}{\omega} \Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t)$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Imponiendo que la velocidad inicial en x es v_{0x}, se llega a que:

$$A = \frac{v_{0x}}{\omega} \Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t)$$

Reemplazando el valor de x en la ecuación 3, llegamos a que:

$$m\dot{y} = -qB_0\frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t)$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Imponiendo que la velocidad inicial en x es v_{0x}, se llega a que:

$$A = \frac{v_{0x}}{\omega} \Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t)$$

Reemplazando el valor de x en la ecuación 3, llegamos a que:

$$m\dot{y} = -qB_0\frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t)$$

A continuación, integrando entre 0 y t.

$$y = \frac{qB_0}{m}\frac{v_{0x}}{\omega^2}(\cos(\omega t) - 1) = \frac{v_{0x}}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Recapitulando, tenemos que :

$$\Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) \qquad \Rightarrow y = \frac{v_{0x}}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Recapitulando, tenemos que :

$$\Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) \qquad \Rightarrow y = \frac{v_{0x}}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

Las ecuaciones para la posición son claramente una hélice centrada en $(x, y) = (0, -\frac{v_{0x}}{\omega})$.

Problema 3 - Fuerza de Lorentz

Recapitulando, tenemos que :

$$\Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) \qquad \Rightarrow y = \frac{v_{0x}}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

Las ecuaciones para la posición son claramente una hélice centrada en $(x, y) = (0, -\frac{v_{0x}}{\omega})$.

FIN

Diland Castro C.

Departamento de Ingeniería Eléctrica