PAUTA AUXILIAR 6 - Polarización y dieléctricos

Solución Pregunta 2:

a) **Antes de la carga $-Q_0$**

- $0 < r < a$. Al ser el casquete interior radio a un conductor, en su interior todos los campos serán nulos
$$\Longrightarrow \vec{D}(0 < r < a) = \vec{E}(0 < r < a) = \vec{P}(0 < r < a) = 0.$$
- $a \leq r < 2a$. Se considera como superficie gaussiana una esfera de radio $r \in (a, 2a)$ de modo que el vector desplazamiento cumple
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D = Q_{\text{libre}}$$
sin embargo, como la carga encerrada es nula, $\vec{D} = 0$, y al ser $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ y $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$ se concluye que
$$\Longrightarrow \vec{D}(a \leq r < 2a) = \vec{E}(a \leq r < 2a) = \vec{P}(a \leq r < 2a) = 0$$
- $2a \leq r$. Para este caso, se considera como superficie gaussiana una esfera de radio mayor que $2a$ que encierra una carga Q^* (que posteriormente se relacionará con V_0).
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D = Q_{\text{libre}} = Q^* \Longrightarrow \vec{D} = \frac{Q^*}{4\pi r^2}$$
usando la relación entre $\vec{D}$ y $\vec{E}$, además del hecho de que fuera del conductor hay vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0$),
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q^*}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$
Al relacionar $\vec{E}$ con V_0 se puede despejar Q^* de modo que
$$V_0 = -\int_{\infty}^{2a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q^*}{4\pi\varepsilon_0 (2a)} \Longrightarrow Q^* = V_0 4\pi\varepsilon_0 (2a)$$
con lo que se pueden concluir los valores de $\vec{D}$ y $\vec{E}$. Adicionalmente, se puede calcular $\vec{P}$ usando $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$, por lo que finalmente se tiene
$$\vec{D} = \frac{V_0 \varepsilon_0 2a}{r^2}\hat{r}, \qquad \vec{E} = \frac{V_0 2a}{r^2}\hat{r}, \qquad \vec{P} = 0$$

(Después de la carga $-Q_0$)

Los campos en las zonas $0 < r < a$ y $2a \leq r$ no cambian con respecto al apartado anterior. Lo primero porque se tiene el mismo casquete conductor en la zona interna y lo segundo porque la esfera exterior se mantiene al mismo potencial V_0, por lo que el campo eléctrico en la zona externa no puede cambiar. Sólo cambian los campos en la zona $a \leq r < 2a$.

- $a \leq r < 2a$. Nuevamente se considera una esfera de radio $r \in (a, 2a)$ como superficie gaussiana. Esta vez la carga libre encerrada corresponderá a $-Q_0$ por lo que
$$\vec{D} = \frac{-Q_0}{4\pi r^2}\hat{r},$$
luego, relacionando $\vec{D}$ con $\vec{E}$ se puede concluir el valor de éste último
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r},$$
y finalmente usando que $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$
$$\vec{P} = \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\hat{r}.$$
En resumen
$$\vec{D} = \frac{-Q_0}{4\pi r^2}\hat{r}, \qquad \vec{E} = \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}, \qquad \vec{P} = \frac{-Q_0}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\hat{r}$$

b) Para calcular la densidad de carga libre se usará $\sigma_{\text{libre}} = D_2^n - D_1^n$ y la densidad de carga de polarización $\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Además, como en este caso todas ellas son homogéneas, las cargas libre, de polarización y total estarán dadas por las siguientes expresiones respectivamente

$$Q_{\text{libre}} = 4\pi R^2 (D_2^n - D_1^n), \qquad Q_{\text{pol}} = 4\pi R^2 (\vec{P} \cdot \hat{n}), \qquad Q_{\text{total}} = Q_{\text{libre}} + Q_{\text{pol}}$$

con R correspondiente al casquete donde se está calculando la carga (recordar que los campos deben evaluarse en el radio dónde se está calculando igualmente).

(Antes de la carga $-Q_0$)

- $r = a$

  Dado que todos los campos son nulos para $r < 2a$ las cargas también lo son

$$Q_{\text{libre}} = Q_{\text{pol}} = Q_{\text{total}} = 0$$

- $r = 2a$

  Las cargas se calculan sólo usando los campos externos (D_2^n corresponde al campo para $r > 2a$) ya que en para $r < 2a$ los campos son 0 (asociado a D_1^n).

$$Q_{\text{libre}} = 4\pi (2a)^2 \frac{V_0 \varepsilon_0 (2a)}{(2a)^2} = 4\pi V_0 \varepsilon_0 (2a)$$

$$\Longrightarrow Q_{\text{libre}} = 4\pi V_0 \varepsilon_0 (2a), \qquad Q_{\text{pol}} = 0, \qquad Q_{\text{total}} = 4\pi V_0 \varepsilon_0 (2a)$$

(Después de la carga $-Q_0$)

- $r = a$

  Se usan los valores de los campos calculados para $a \leq r < 2a$. Para la carga de polarización la normal es $\hat{-r}$

$$Q_{\text{libre}} = 4\pi a^2 \frac{-Q_0}{4\pi a^2} = -Q_0$$
$$Q_{\text{pol}} = 4\pi a^2 \frac{-Q_0}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \hat{r} \cdot -\hat{r} = Q_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\Longrightarrow Q_{\text{libre}} = -Q_0, \qquad Q_{\text{pol}} = Q_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right), \qquad Q_{\text{total}} = -Q_0 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

- $r = 2a$

  Para la carga de polarización se usa que la normal $\hat{r}$

$$Q_{\text{libre}} = Q_0 + V_0 4\pi \varepsilon_0 (2a)$$
$$Q_{\text{pol}} = 4\pi (2a)^2 \frac{-Q_0}{4\pi (2a)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \hat{r} \cdot \hat{r} = -Q_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\Longrightarrow Q_{\text{libre}} = Q_0 + V_0 4\pi \varepsilon_0 (2a), \quad Q_{\text{pol}} = -Q_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right), \quad Q_{\text{total}} = V_0 4\pi \varepsilon_0 (2a) + Q_0 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

c) La diferencia del sistema antes y después de traer la carga $-Q_0$ es que inicialmente sólo existe carga libre en $r = 2a$, mientras que posteriormente, además de la carga libre en el casquete externo, en $r = a$ se tiene una carga libre$-Q_0$ mientras que en $r = 2a$ se tiene una carga libre extra igual a Q_0. De esta manera se tiene un condensador que antes no existía, que almacena una energía extra correspondiente a la entregada al sistema. Por consiguiente se debe hacer un trabajo sobre el sistema para situar la carga en el interior.

d) Para calcular la energía suministrada al sistema se calcula la diferencia antes y después de situar $-Q_0$. La única diferencia es que en la segunda situación se tiene un campo en la zona $a < r < 2a$ que antes no existía, cuya energía se puede calcular como

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

(Antes de la carga $-Q_0$)
Dado que en este caso $\vec{D} = \vec{E} = 0$ la energía en esta zona es 0.

(Después de la carga $-Q_0$)

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}dV = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{2a} \frac{-Q_0}{4\pi r^2}\hat{r}\cdot\frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}r^2\sin\theta drd\theta d\phi = 2\pi\frac{Q_0^2}{(4\pi)^2\varepsilon}\int_a^{2a}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q_0^2}{16\pi\varepsilon a}$$

Esta energía coincide con la energía almacenada por un condensador de carga Q_0 y capacidad $C = \frac{4\pi\epsilon}{1/a-1/(2a)} = 8\pi\epsilon a$, donde la energía se calcula $U_e = Q^2/(2C)$.

Lo anterior permite concluir que $\Delta U_e = \dfrac{Q_0^2}{16\pi\varepsilon a}$, corresponde a la energía que se le suministró al sistema.