

■ P₁ - Auxiliar 6

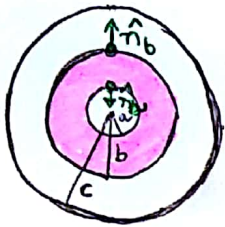
Ⓐ Densidades de carga libre y polarización en $r=a$
 $r=b$
 $r=c$

$$\vec{P} = P_0 r \hat{r}$$

Polarización

▲ Volumétrica $\Rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_0 r) = -\frac{1}{r^2} \cdot 3r^2 P_0 = -3P_0 = \rho_p$

▲ Superficial $\Rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$



$$\Rightarrow \hat{n}_a = -\hat{r}$$

$$\hat{n}_b = +\hat{r}$$

$$\Rightarrow \sigma_p(r=a) = \vec{P}(r=a) \cdot \hat{n}_a = P_0 \cdot a \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -P_0 a = \sigma_p(r=a)$$

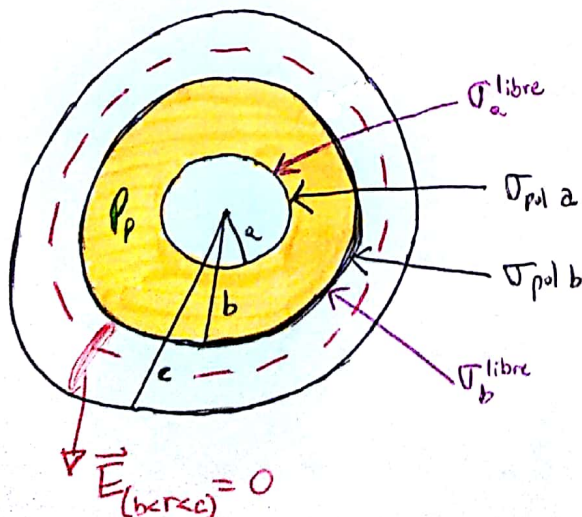
$$\sigma_p(r=b) = \vec{P}(r=b) \cdot \hat{n}_b = P_0 b \hat{r} \cdot \hat{r} = P_0 b = \sigma_p(r=b)$$

Carga libre

* Conductores descargados y aislados

$r=a$, como en el interior no hay cargas $\Rightarrow Q_a^{\text{libre}} = 0 \Rightarrow \sigma_a^{\text{libre}} = 0$

$r=b$



$\Rightarrow$ Como entre a y b el campo debe ser nulo, por propiedad de conductores.

Se tendrá que σ_b^{libre} será tal que al calcular Q_{total} se obtenga cero.

$$\Rightarrow Q_{\text{pol}}^a = \int \underbrace{\sigma_p^a}_{-P_0 a} dS = -P_0 a \cdot 4\pi a^2$$

$$\Rightarrow Q_{\text{pol}}^b = \int \underbrace{\sigma_p^b}_{P_0 b} dS = P_0 b \cdot 4\pi b^2$$

$$Q_{pp} = \int \rho_p dV = \int -3\rho_0 dV = -\cancel{3}\rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 \right)$$

$$Q_{pp} = -4\pi\rho_0(b^3 - a^3)$$

$$Q_{libre}^b = \int \sigma_{libre} dS = 4\pi b^2 \cdot \sigma_{libre}^b$$

Luego,

$$Q_{total} = Q_{pol}^a + Q_{pol}^b + Q_{pp} + Q_{libre}^b \stackrel{!}{=} 0 \quad \swarrow \text{condición!}$$

$$= 4\pi\rho_0(\cancel{-a^3} + \cancel{b^3} - \cancel{b^3} + \cancel{a^3}) + 4\pi b^2 \cdot \sigma_{libre}^b = 0$$

$= 0$

$$\Rightarrow 4\pi b^2 \sigma_{libre}^b = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\sigma_{libre}^b = 0}$$

Asimismo, como el conductor exterior está descargado

$$4\pi b^2 \cdot \cancel{\sigma_{libre}^b} + \sigma_{libre}^c \cdot 4\pi c^2 = 0$$

$\swarrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{libre}^c = 0}$$

◆ Calcular la diferencia de Potencial entre conductores

Calculamos $\vec{E}$ entre conductores $r \in (a, b)$. Necesitamos...

$$\Phi = 4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{total} = \cancel{\sigma_{libre}^a}(4\pi a^2) + \sigma_{pol}^a(4\pi a^2) + \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) \cdot \cancel{-3\rho_0} = 0$$

$$= [-\rho_0 a] \cdot 4\pi a^2 + \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) \cdot \cancel{-3\rho_0} = \cancel{-\rho_0 a^3 4\pi} + \cancel{\rho_0 a^3 4\pi} - \rho_0 r^3 4\pi$$

$$Q_{total} = -\rho_0 r^3 4\pi$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{-4\pi r^2 P_0}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{P_0 r}{\epsilon_0} \hat{r}}$$

Con esto, podemos calcular ΔV

$$\Delta V = - \int_a^b -\frac{P_0 r}{\epsilon_0} dr = \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} \right)_a^b = \frac{P_0}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2)$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{P_0}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2)}$$

Ⓑ Ambos conductores se interconectan mediante un hilo metálico

! Para este caso, las densidades de polarización serán las mismas

Sin embargo, para mantener $\Delta V = 0$ (casquetes equipotenciales) entre ambos conductores cambiarán las cargas en los mismos.

$$Q_a \neq 0$$

$$\Rightarrow \iint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_a \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\text{Pero, } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{Q_a}{4\pi r^2 \epsilon_0} - \frac{P_0 r}{\epsilon_0} \right) \hat{r}$$

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = \int_a^b \left(\frac{Q_a}{4\pi r^2 \epsilon_0} - \frac{P_0 r}{\epsilon_0} \right) dr$$

$$= \int_a^b \frac{Q_a}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr - \int_a^b \frac{P_0 r}{\epsilon_0} dr = \frac{Q_a}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b - \frac{P_0 r^2}{2\epsilon_0} \Big|_a^b$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) - \frac{P_0}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q_a}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right) = \frac{P_0}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2) = \frac{P_0 (b+a)(b-a)}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_a}{2\pi \epsilon_0 ab} = \frac{P_0 (a+b)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_a = 2\pi P_0 a \cdot b (a+b)}$$

Luego, $Q_a = \frac{4\pi a^2}{2} \cdot \sigma_{\text{libre}}^a = 2\pi P_0 ab (a+b)$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{libre}}^a = \frac{P_0 (a+b)b}{2a}}$$

Necesitamos también que en el cosquete conductor externo $\vec{E} = 0$

$$Q_a + Q_b = 0 \Rightarrow Q_a = -Q_b \Rightarrow \sigma_{\text{libre}}^b = \frac{-Q_a}{4\pi b^2} = \frac{-2\pi P_0 ab (a+b)}{4\pi b^2} = \frac{-P_0 a (a+b)}{2b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{libre}}^b = -\frac{P_0 \cdot a (a+b)}{2b}}$$

Finalmente, para que el conductor exterior siga neutro.

$$Q_b + Q_c = 0$$

$$\Rightarrow Q_c = -Q_b = Q_a \Rightarrow \sigma_{\text{libre}}^c = \frac{\cancel{2\pi} P_0 \overset{Q_a}{ab} (a+b)}{\cancel{4\pi} c^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{libre}}^c = \frac{P_0 ab(a+b)}{2c^2}$$

//